EXERCICES ET FORMULAIRE DE REVISION DU PROGRAMME DE MATH/TERMINALE S, POUR PREPARER LA RENTREE EN BCPST. *AVEC CORRECTION*

Document téléchargeable sur: ***laurentgautret.sitew.fr***

SOMMAIRE:

Bonjour,

L'ensemble de nos documents de travail en Mathématiques et Informatique (Travail de pré-rentrée et formulaire de Math de revision de la TS, Cours, TD, TP, Devoirs, Corrigés…) se trouveront (et se trouvent déjà pour les 2 premiers) sur mon site web: **http://www.laurentgautret.sitew.fr**
L'enseignement des mathématiques en classe prépa est très différent du lycée. Plus pointu, plus exigeant, plus technique et rigoureux. Pour grimper sereinement le palier qui se dresse devant vous il est indispensable de se préparer, et ce au plus tard deux à trois semaines avant la rentrée.
Il s'agit de vérifier que vous êtes solidement assis sur vos bases de Terminale, en tout cas aussi bien que vos collégues des grands Lycées métropolitains. Mieux vaut ne pas hésiter sur les formules de l'exponentielle, sur un calcul de dérivée, sur une valeur de cosinus... sans quoi vous risquez d'être gêné durant toute l'année !
Pour vous aider à faire cette vérification, vous trouverez dans ce document :

1 Des exercices de pré-rentrée (partie I) : organisés en 9 thématiques, ils couvrent l'essentiel du programme de TS, et sont de difficulté croissante dans chaque thématique. Je vous demande de faire au moins 30 à 50% des exercices de ce document en n'hésitant pas à affronter les exercices qui vous posent problème, à l'aide si nécessaire des indications, exercice par exercice, fournies dans la partie III. Si vous êtes bloqué(e), pas de panique ! La plupart des thématiques seront revues au cours de l'année.
Début Août, je mettrai sur mon site des éléments de correction de ces exercices. Vous devrez alors lire les corrections des exercices sur lesquels vous aurez préalablement réfléchi, et préparer des questions sur les incompréhensions qui vous resteront.
Nous aurons à la rentrée des séances de TD dédiées pour répondre à vos questions.

2 Un formulaire de Math de revision de TS (partie II) : tout doit être su ! Dans le cas contraire, revoyez le(s) chapitre(s) mal compris en Terminale.

Vous trouverez le plan du cours du premier semestre de Mathématiques sur mon site (le polycopié vous sera fourni à la rentrée): vous n'avez donc aucun livre à acheter.

Bon courage à tous!

Partie I : Enoncés des Exercices

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

Résoudre les équations suivantes sans calculer le discriminant :

1. $x^2 + 3x = 0$
2. $x^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 6x + 9 = 0$
4. $x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$
6. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$

Exercice 1.2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x+1)(x+2) \leqslant 0$
2. $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 0$
3. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 > 0$
4. $|x - 9| \leqslant 2$
5. $\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$
6. Résoudre $1 \leqslant x^2 \leqslant 2$ puis $1 \leqslant \sqrt{3x^2 - 2} \leqslant 2$

Exercice 1.3

L'objectif ici, est de savoir faire ces calculs correctement et **rapidement**, c'est pour cela qu'ils sont assez simples. Compléter ou résoudre l'équation ou inéquation :

1. $|-3x + 4| = 7$
2. $|-3x + 4| = |x + 1|$
3. $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| \leqslant 3$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$
5. Résoudre sur $[0; 2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$: $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) =$
7. $\sqrt{3x+1} - x > 0$
8. $\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 6 - 11\mathrm{e}^{x}$
9. $\ln(x-1) + \ln(x+1) - 2\ln(x) = 0$

Exercice 1.4

Résoudre les équations et inéquations suivantes (on pensera aux formules de trigo !) :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = -1$.
2. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0$.
3. $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 > 0$.
4. $\dfrac{2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1}{2\cos(x) - 1} \leqslant 0$

Exercice 1.5

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$ (utiliser des combinaisons linéaires d'équations).

✓ $(S_1)\begin{cases}(E_1) & 2x+y=3\\ (E_2) & x-3y=8\end{cases}$

✓ $(S_2)\begin{cases}(E_1) & 2ix+y(i+1)=5(i-1)\\ (E_2) & x-3y=1-8i\end{cases}$

✓ $(S_3)\begin{cases}2x+y+z=3\\ x-y+3z=8\\ x+2y-z=-3\end{cases}$

2 Fonctions d'une variable réelle

Attention, pour tous les exercices de cette partie, l'usage de la calculatrice est interdit. De manière générale vous ne serez pas autorisé(e) à utiliser la calculatrice en cours de mathématiques.

Exercice 2.1

Soient x, a, b, c, d des réels strictement positifs. Cochez la réponse correcte :
Pour la définition de x^a avec $a \in \mathbb{R}$, vous pouvez consulter le résumé sur les fonctions usuelles p12.

1. On a $\ln(a+b) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(ab)$ ☐ rien de tout cela

2. On a $\ln(ab) =$ ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(a+b)$ ☐ rien de tout cela

3. On a $\mathrm{e}^{a+b} =$ ☐ $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ ☐ $\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b$ ☐ $(\mathrm{e}^a)^b$ ☐ rien de tout cela

4. On a $\sqrt{a+b} =$ ☐ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ☐ $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ☐ rien de tout cela

5. On a $\sqrt{a}\sqrt{b} =$

   ☐ $\sqrt{ab}$ ☐ $(\sqrt{a})^{\sqrt{b}}$ ☐ rien de tout cela

6. On a $0^0 =$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ rien de tout cela

7. On a $(x^a)^b =$

   ☐ x^{a^b} ☐ x^{ab} ☐ $x^a x^b$ ☐ rien de tout cela

Exercice 2.2

Compléter :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} =$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} =$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x) =$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} =$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} =$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^{x+2} =$
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} =$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} =$

Exercice 2.3

Soit la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{|2x+2|}{x+2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que la courbe de f admet des droites asymptotes en $+\infty$,en $-\infty$ et en -2 et donner leur équation.
3. Donner l'expression de $f(x)$ sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et sur $]-1;+\infty[$ puis étudier les variations de f.

Exercice 2.4

Etudier les variations et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 2.5

Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de la fonction et les limites aux bornes du domaine de définition pour les fonctions f définies pour une variable réelle par :

1. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$
2. $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)$
   Remarque. Le domaine de définition est-il le même que celui de la question précédente ?

À retenir. Pour une fonction u dérivable et qui ne s'annule pas, la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, il n'y a pas à séparer les cas $u(x) > 0$ et $u(x) < 0$.
A contrario, pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto |u(x)|$ il faut séparer les cas.

Exercice 2.6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Calculer $f'(x)$,$f''(x)$.
Conjecturer l'expression de la dérivée n-ième de f, et démontrer le résultat par récurrence.

Exercice 2.7

Déterminer le domaine de définition puis le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$ et dessiner son allure sur un graphe.

Exercice 2.8

Déterminer le domaine de définition, le tableau de variations et tracer l'allure des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On déterminera avec soin le domaine d'étude et on tracera le graphe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$.

Exercice 2.9

Dans chaque cas suivant, donner le domaine de définition de la fonction puis calculer sa dérivée en précisant sur quel ensemble la fonction est dérivable :

1. $f : x \mapsto \ln(2x+1)$
2. $h : x \mapsto \sin(\pi - 2x)$

Exercice 2.10

On pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction appelée tangente. On le notera D.
2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Etudier les variations de la fonction sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle puis tracer son graphe.
4. Déduire de la question précédente les variations et le graphe de la fonction sur $\left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
5. Résoudre graphiquement sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis par le calcul sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan(x) = \sqrt{3}$.
6. Résoudre graphiquement sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $0 < \tan(x) \leqslant 1$.

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(2n+3)(2n+1)}{(n+1)^2}$

✓ Montrer que cette suite est majorée par 4.
✓ Etudier les variations de cette suite.
✓ Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 3.2

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{sin(n)}{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes positifs.
2. Montrer que cette suite est bornée et qu'elle converge, calculer sa limite.

Exercice 3.3

Soit la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} + 1$. avec $v_0 = 1$. C'est une suite **arithmético géométrique**.

1. Déterminer la solution réelle a de l'équation, $x = \dfrac{x}{3} + 1$.
2. Posons alors $u_n = v_n - a$.
   Montrer que (u_n) est alors une suite géométrique, préciser sa raison et le premier terme.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Qu'elle est la limite de la suite (v_n) ?

Remarque. Dans les exercices suivants (et de manière générale), on utilise la notation « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ » qui représente la somme pour l'indice k entier variant de 1 à n des $f(k)$, ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{5} \sin(k+n) = \sin(2+n) + \sin(3+n) + \sin(4+n) + \sin(5+n)$$

Exercice 3.4

Montrer par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n^2)(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3.5

Considérons la suite (u_n) définie par :$u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k$ est égale à : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire une simplification de u_n.
3. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 3.6

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$ et $u_0 = 2$
On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 6$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Trigonométrie

Exercice 4.1

Utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver toutes les relations du type $\sin(\pi - x) =$ et les propriétés de parité et de périodicité des fonctions sinus et cosinus

Exercice 4.2

1. Développer $\cos(a - b)$.
2. Développer $\cos(a + b)$.
3. En déduire la transformation en somme de cosinus de $\cos(a)\cos(b)$. (l'objectif est de retrouver la formule énoncée dans le cours)
4. De même, déterminer la transformation en somme de cosinus de $\sin(a)\sin(b)$.
5. Déterminer la transformation en somme de $\sin(a)\cos(b)$.

Exercice 4.3

Toutes les formules de trigonométrie sont à savoir parfaitement, pour vous aider à tester si vous les avez bien apprises, compléter le formulaire suivant :

1. $\sin(a) + \sin(b) =$
2. $\cos(2a) =$ donner 3 formes différentes
3. $\sin(a - b) =$
4. $\cos(a - b) =$
5. $\cos(a)\sin(b) =$

Exercice 4.4

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
En déduire une égalité du même type pour $\sin(3x)$.

Exercice 4.5

Toutes les formules de trigonométrie sont à savoir parfaitement, pour vous aider à tester si vous les avez bien apprises, compléter le formulaire suivant :

1. $\sin(2a) =$
2. $\tan(2a) =$
3. $\cos(a+b) =$
4. $\tan(a+b) =$
5. $\cos(a)\cos(b) =$
6. $\sin^2(a) =$ en fonction de $\cos(2a)$
7. $\sin(a)+\sin(b) =$ (transformation en produit)

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes :

- ✓ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$
- ✓ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$
- ✓ $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$
- ✓ $\displaystyle\int_0^1 e^{3u}du$
- ✓ $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{2}{3x-1}dx$

Exercice 5.2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$
3. $f_3(x) = \cos^2(x)$
4. $f_4(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

Remarque. Pour les questions 3. et 4. on pourra utiliser les formules de trigonométrie pour transformer les expressions en somme.

6 Nombres complexes

Exercice 6.1

Calculer le module et l'argument principal des nombres complexes suivants.

$$a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad a^3, \quad ab, \quad a+b, \quad \frac{a}{b}$$

Exercice 6.2

Déterminer r et θ réels tels que : $re^{i\theta} = 1+i$.
Même question avec $re^{i\theta} = 1-i$

Exercice 6.3

Soient $Z = 2+2i$ et $Z' = 1+i\sqrt{3}$.

1. Ecrire Z et Z' sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{Z}{Z'}$ .Calculer Z'^3.

Exercice 6.4

Pour z différent de $-i$, on définit $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.
Calculer $f(1+i)$,$f(e^{i\pi})$,$f(1+i\sqrt{3})$
Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) = 2$.

7 Calcul algébrique

Exercice 7.1

Simplifier : $\dfrac{1+\frac{x+1}{x+3}}{x+4}$

Exercice 7.2

Simplifier l'expression :$\dfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}}$

Exercice 7.3

Simplifier :$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2$

Exercice 7.4

Exprimer sans racines carrées :$\sqrt{1+\sin(2y)} + \sqrt{1-\sin(2y)}$
Simplifier l'expression quand $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

8 Géométrie

Exercice 8.1

Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,-2)$, $C(a,0,-2)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

1. En utilisant le produit scalaire, exprimer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer alors a pour qu'il en soit ainsi.
3. Qu'elles sont alors les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

Exercice 8.2

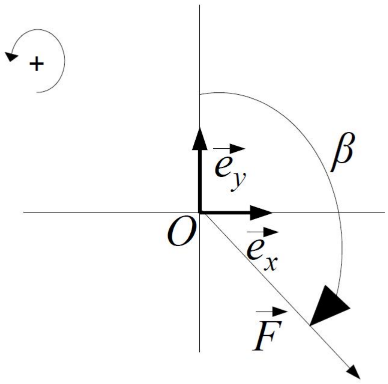
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'équation du plan perpendiculaire à la droite de direction $\vec{u}(1,2,3)$ passant par le point $A(0,1,0)$.

Exercice 8.3

Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $C(1,1,1)$ de rayon $R = 3$.
Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à cette sphère passant par le point $A(0,3,3)$.

Exercice 8.4

Déterminer a et b tels que la force $\overrightarrow{F}$ puisse s'écrire sous la forme $\overrightarrow{F} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de β et de sa norme notée F. On pourra penser à utiliser le produit scalaire.



9 Probabilités

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10%, 40% et 50% de la production totale de son usine.
Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5% pour la machine A, de 1,5% pour la machine B et de 2,2% pour la machine C.
Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines.
On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.

2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.

3. Caculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.

4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

Partie II : Documents et Formulaires

Alphabet grec

Les lettres grecques sont employées très fréquemment en sciences, il faut donc les connaître afin d'éviter les mal-entendus lors des cours.

minuscule	majuscule	nom	minuscule	majuscule	nom
α		alpha	ν		nu
β		bêta	ξ	Ξ	xi ou ksi
γ	Γ	gamma	o		omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε		epsilon	ρ		rho
ζ		zêta	σ	Σ	sigma
ι		iota	τ		tau
κ		kappa	χ		chi (se dit « ki »)
λ	Λ	lambda		Ψ	psi
μ		mu	ω	Ω	omega

NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique $z = x + iy$.
Forme trigo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,
Forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.
$|z|$ est le *module* de z, et θ est *un argument* de z.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\overline{z}, \quad \text{et} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0).$$

Conjugué : $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$
Propriétés du module :

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |1/z| = 1/|z|, \quad |zz'| = |z|.|z'|$$

Propriétés de l'argument :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg(1/z) = -\arg z \quad [2\pi], \quad \arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

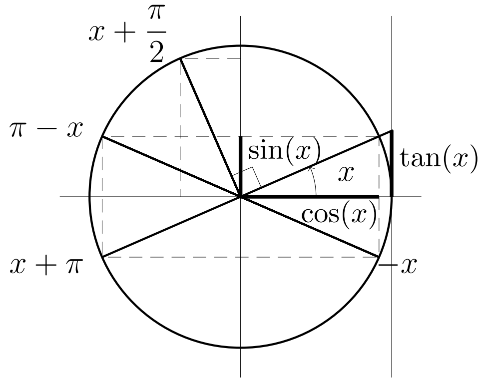
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = 0$, une solution $z = \frac{-b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes $z = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exponentielle complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Trigonométrie

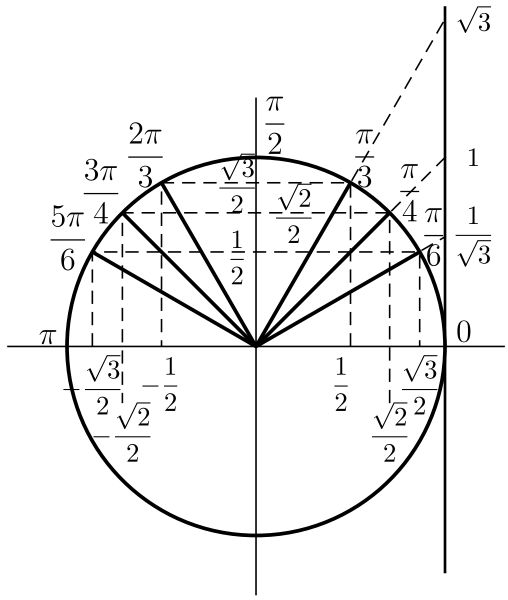


tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \tan(x+\pi) = \tan(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x) \qquad \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(x)}$$



Formules à connaître par cœur.

- ✓ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- ✓ $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
- ✓ **Formules d'addition :**

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

- ✓ **Angle double (a=b) :**

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules à connaître ou savoir retrouver.

- ✓ **Linéarisation :** *(se déduisent de* $\cos(2a)\ldots$ *)*

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

- ✓ **Transformation de produit en somme :** *(se déduisent des formules d'addition)*

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$

- ✓ **Transformation de somme en produit :** *(se déduisent des formules d'addition)*

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

- ✓ **Transformation en fraction rationnelle :** *(se déduisent de* $\tan(2a) = \ldots$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *et* $1+\tan^2(a) = \ldots$ *)* on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Résumé sur les fonctions usuelles

1 Fonction valeur absolue

Définition 1.1

La fonction valeur absolue*, notée* $|\ \ |$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pour x et a deux réels,
$|x|$ représente la distance entre le point d'affixe x et l'origine
$|x-a|$ représente la distance entre le point d'affixe x et le point d'affixe a.

Pour résoudre une équation du type $|a| = b$, on utilise l'équivalence suivante

$$|a| = b \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

Exemple : Résolution de l'équation $|2x-1| = 4$:

$$\begin{aligned} |2x-1| = 4 &\iff 2x-1 = 4 \text{ ou } 2x-1 = -4 \\ &\iff 2x = 5 \text{ ou } 2x = -3 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Pour résoudre une équation du type $|a| \leqslant b$, on utilise l'équivalence suivante (méthode à adapter pour les autres cas de figure)

$$|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$$

Proposition 1.2

La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Si on note $f : x \mapsto |x|$, on a :

$$f \ :\ x \longmapsto \begin{matrix} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{matrix} \qquad f' \ :\ x \longmapsto \begin{matrix} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{matrix}$$

2 Fonctions logarithme et exponentielle

Définition 2.1

$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est la primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *qui s'annule en* 1.

Proposition 2.2

1. $\ln$ *est une bijection*[1] *de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \big(\ln\big)'(x) = \frac{1}{x}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

[1] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Définition 2.3

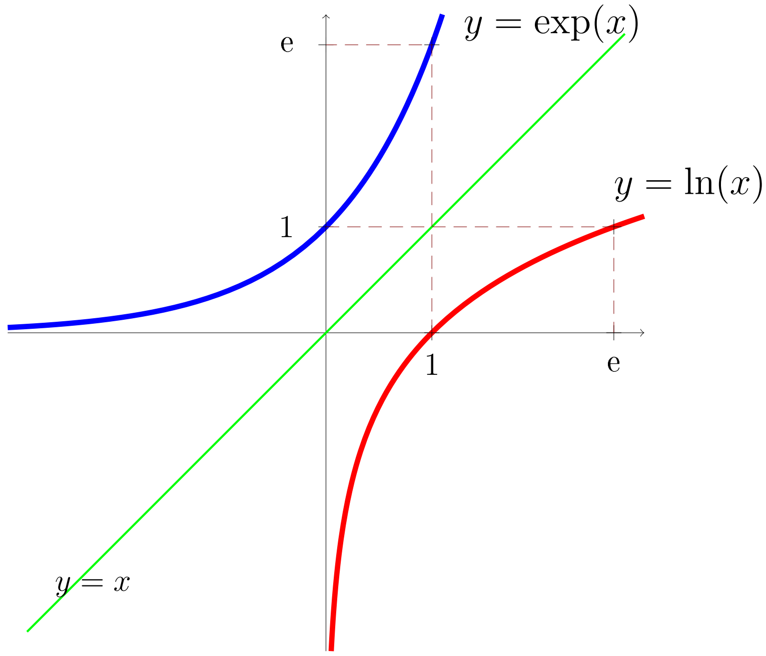
La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est la bijection réciproque*[2] *de* $\ln$.

Proposition 2.4

1. $\exp$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction exponentielle.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition 2.5

1. $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
   $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$



3 Fonctions puissances

Ces notions seront reprises et approfondies lors du chapitre « Bases d'Analyse ».

Définition 3.1 (***Puissances entières d'exposant positif***)

Soit $x \in \mathbb{R}$*, on définit :* $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$, $\ldots$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit* $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = x \times x^{n-1}$

Définition 3.2 (***Puissances entières d'exposant négatif***)

Soit $x \in \mathbb{R}$*, pour* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit :*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

[2] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Racine n-ième

1. **Cas des racines carrées** : Pour $x > 0$, l'équation : $t^2 = x$ admet deux solutions réelles de signe opposé, et on pose $\sqrt{x}$ l'unique solution qui est positive.
   Ainsi, pour x et t **réels positifs** : $\left(t^2 = x \text{ } et \text{ } t \geqslant 0\right) \iff t = \sqrt{x}$
2. **Cas des racines cubique** : Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $t^3 = x$ admet une unique solution réelle, on pose $\sqrt[3]{x}$ l'unique solution de cette équation. Ainsi, pour x et t **réels** : $t^3 = x \iff t = \sqrt[3]{x}$

Définition 3.3 (***Racine n-ième***)

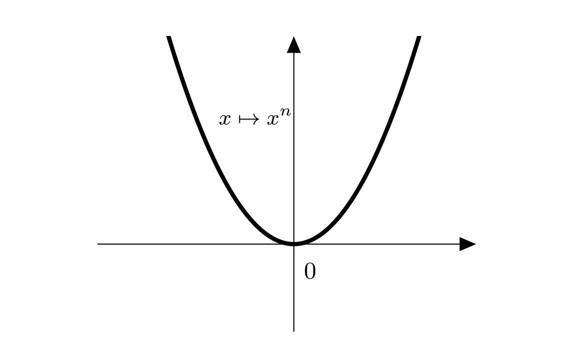
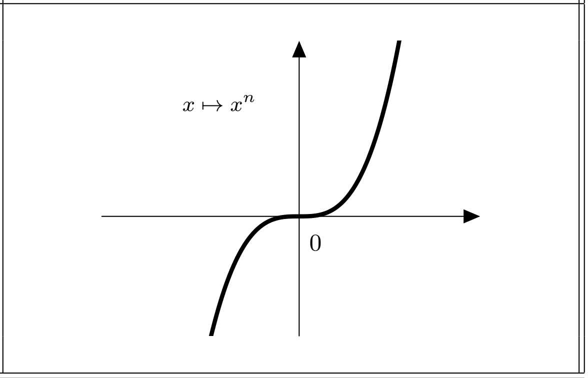
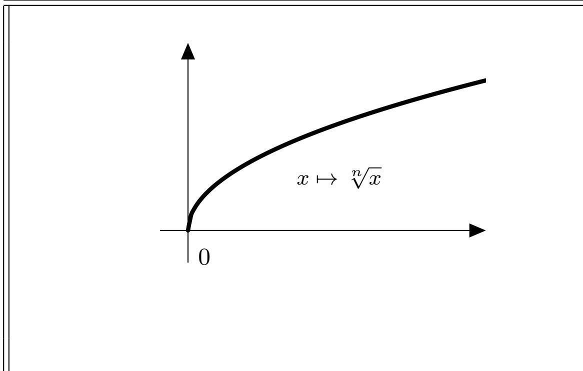
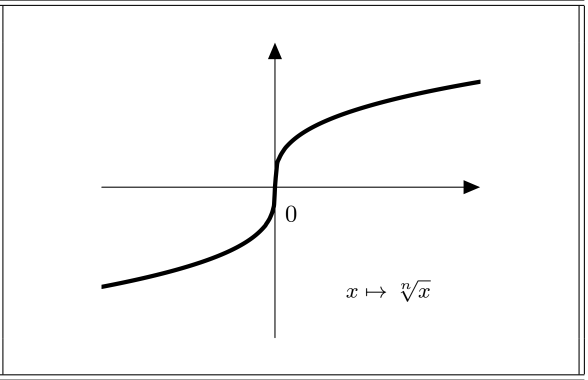
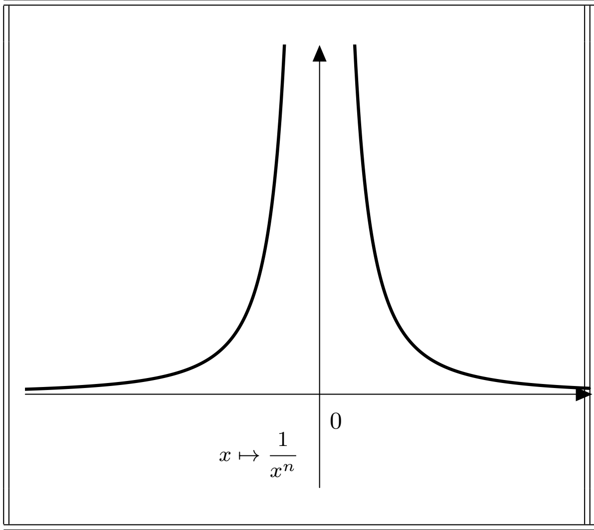
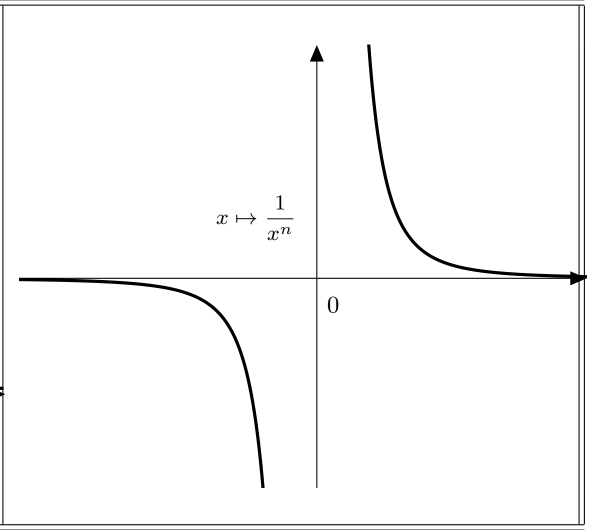
1. *Pour n entier positif **impair**, on définit la fonction racine $n-$ième sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel solution de l'équation $t^n = x$.*
2. *Pour n entier positif **pair**, on définit la fonction racine $n-$ième sur $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante : pour $x \geqslant 0$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel **positif** solution de l'équation $t^n = x$.*

De plus, on pourra noter que : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

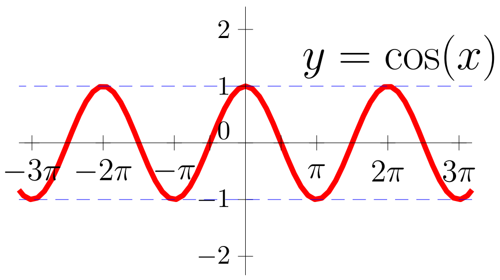
Dérivée des fonction puissances : lorsque la fonction est dérivable et pour α constante, on a

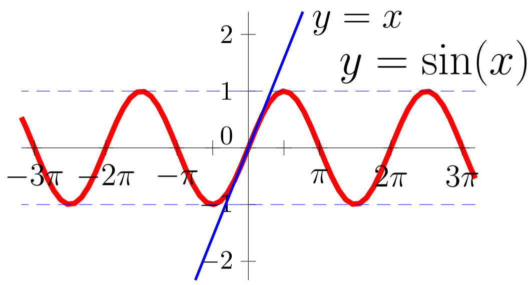
$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

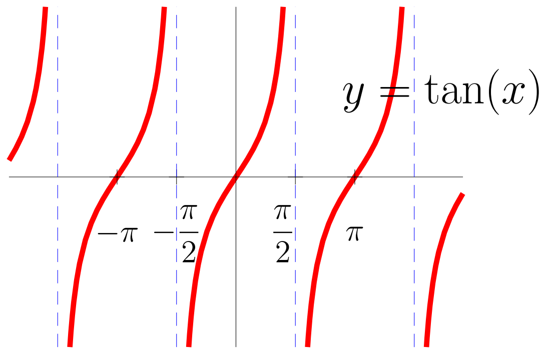
Allure des courbes Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

n pair	n impair
	
	
	

4 Fonctions trigonométriques







✓ cos et sin sont 2π-périodiques
✓ cos et sin sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

✓ tan est π-périodique
✓ tan est définie, continue et dérivable sur $D_{\tan} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + p\pi, \frac{\pi}{2} + p\pi\right[$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

5 Dérivées - Primitives

Fonction	**Dérivée**	**Fonction**	**Dérivée**
x^p	px^{p-1}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
uv	$u'v + uv'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$	e^u	$u'e^u$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$(1 + \tan^2(x))$	$v \circ u$	$u' \times v' \circ u$

Fonction	**Primitive**	**Fonction**	**Primitive**
a	$ax + b$	u'	$u + b$
x	$\frac{1}{2}x^2 + b$	$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + b$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x\rvert) + b$	$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u\rvert) + b$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + b$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + b$
x^a, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + b$	$u'u^a$, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1} + b$
e^{ax+b} avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$u'e^u$	e^u

Si f est continue sur [a, b]: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Relation de Chasles. $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$.

Limites usuelles

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynomes) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

✓ La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degré

✓ Les limites suivantes sont obtenue à l'aide de la définition du nombre dérivé (ce sont les limites d'un taux d'accroissement) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

✓ Croissance comparée exponentielle/puissance et logarithme/puissance en $+\infty$ et $-\infty$:

- pour tout $\alpha>0, n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^m\mathrm{e}^{\alpha x}=0$
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\big(\ln(x)\big)^m}{x^n}=0$

✓ Croissance comparée logarithme / puissance en 0^+ :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^n\big(\ln(x)\big)^m=0$

PROPRIETE DE LA CROISSANCE COMPAREE POUR CALCULER UNE LIMITE:
"LORSQU'IL Y A INDETERMINATION: *L'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances l'emportent sur le logarithme* "

IDENTITES REMARQUABLES

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab, \qquad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab,$$
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2, \qquad (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2.$$

SOMMES CLASSIQUES

Somme d'une suite arithmétique:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Somme d'une suite géométrique:

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & si\ q\neq 1\\ n+1\,, & si\ q=1\end{cases}$$

Espérance d'une variable aléatoire finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Loi de Bernoulli : $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Loi uniforme entre 1 **et** n : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$, pour k entre 1 et n.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n$.

Probabilité de A **sachant** B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

Partie III : Indications et Pistes

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

1. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.
2. Factoriser le polynôme.
3. Factoriser le polynôme à l'aide d'une identité remarquable.
4. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.
5. Factoriser le polynôme.
6. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.

Exercice 1.2

1. Faire un tableau de signe si besoin.
2. Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit en elevant les annulations du dénominateur.
3. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes (il y en a deux différentes ici).
4. Transformer en encadement ou faire un dessin pour visualiser $|x-9|$ comme la distance entre x et 9.
5. Regrouper en mettant au même dénominateur.
6. Résoudre $3x^2 - 2 \geqslant 0$ puis élever au carré dans l'inégalité... pourquoi a-t-on le droit de le faire sans changer le sens des inégalités ?

Exercice 1.3

1. Voir l'exemple du cours.
2. Distinguer les cas de valeurs égales et de valeurs opposées.
3. Encadrer $\dfrac{1}{x}$. On fera attention au signe de x pour le passage à l'inverse.
4. Utiliser le cercle trigonométrique.
5. Utiliser $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et faire le lien avec $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
6. On fera l'étude de l'inégalité $\sqrt{3x+1} > x$ en séparant les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.
7. Poser $u = \mathrm{e}^x$ et obtenir un polynôme de degré 3 à factoriser.
8. Regrouper les logarithmes après avoir donné le domaine de définition.

Exercice 1.4

1. Relier $\cos(2x)$ à $\cos^2(x)$ à l'aide des formules de trigonométrie et poser $t = \cos(x)$.
2. Diviser par 2 et reconnaître une formule de trigonométrie.
4. Factoriser le numérateur et faire un tableau de signe regroupant chaque morceau.

Exercice 1.5

On donne ici des pistes pour résoudre les systèmes par substitution, bien que ce ne soit pas la méthode conseillée. En effet, on préfèrera l'utilisation de combinaisons linéaires d'équations pour éliminer les variables, c'est la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode est algorithmique et peut donc se généraliser à un système de taille quelconque.
Pour résoudre par substitution :

1. $3(E_1) + (E_2)$ donne x.
2. $(E_1) - 2\mathrm{i}(E_2)$ donne y.
3. L'équation (E_3) donne $z = 3 + x + 2y$ on peut alors substituer dans (E_1) et (E_2).

Pour résoudre (S_3) par la pivot de Gauss (méthode vu en 1A) par exemple : on récrit les équations en placant la variable y en premier, puis on remplace E_2 par $E_2 + E_1$ et E_3 par $E_3 - 2E_1$, ainsi, il n'y a plus de « y » dans les nouvelles équations 2 et 3. On peut alors recommencer l'opération pour éliminer x de la dernière équation en utilisant les 2 dernières lignes de ce système.

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 2.1

Voir l'étude des fonctions usuelles correspondantes.

Exercice 2.2

Les questions 1, 3, 4, 5 et 7 sont des limites usuelles (la 7 est un taux d'accroissement).

2. Ce n'est pas une forme indéterminée.
6. Factoriser par e^2, on se retrouve avec une limite usuelle.
7. Reconnaître un taux d'accroissement, voir aussi formulaire des limites usuelles.
8. Se déduit de 7.

Exercice 2.3

On pourra donner une expression de $f(x)$ sans valeur absolue pour toute valeur de x dans le domaine de définition.

Exercice 2.5

2. Donner le domaine de définition puis calculer f', on en déterminera le signe en regroupant les fractions.

Exercice 2.6

Bien séparer l'étape qui permet de « deviner la formule », en calculant si besoin les dérivées suivantes, de la rédaction de la récurrence en elle-même. Soigner la rédaction de la récurrence.

Exercice 2.7

Il est plus facile de développer le produit avant de calculer la dérivée !

Exercice 2.8

1. Voir comment est modifié le graphe de la fonction sinus.
2. Penser à simplifier l'expression de g.

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

✓ Calculer et simplifier $u_n - 4$.
✓ Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$
✓ Factoriser le numérateur et le dénominateur de u_n par le « terme prépondérant » à savoir n^2 ici.

Exercice 3.2

On procédera par encadrement en commençant par le sinus.

Exercice 3.3

3. Commencer par donner u_n en fonction de n.

4 Trigonométrie

Pour les exercices **4.1**, **4.2**,**4.3** **4.6** : Bien apprendre les formules de trigo !!!!!

Exercice 4.4

$\cos(3x) = \cos(2x + x)$

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Chercher à reconnaître des formes dérivées comme « $\frac{u'}{u}$, $u' \times u^n$, ... » pour pouvoir intégrer directement. Il est important de s'entrainer à « voir » cela.

Exercice 5.2

3. Exprimer en fonction de $\cos(2x)$.
4. Formule de trigonométrie permettant de transformer le produit en une somme.

6 Nombres complexes

Pour les exercices **6.1**, **6.2** et **6.3** et de manière générale lorsqu'on manipule des nombres complexes, il faut penser à faire le lien avec la géométrie. Ne pas hésiter à placer les points sur le plan. Par exemple, quel est l'argument d'un nombre complexe placé sur la première bissectrice (d'équation $y = x$) ?

7 Calcul algébrique

Exercice 7.5

Développer $(\cos(y) + \sin(y))^2$ et $(\cos(y) - \sin(y))^2$. Pour la simplification, réfléchir au signe des expressions.

8 Géométrie

Exercice 8.1

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $(AB) \perp (AC)$ ce qui se traduit par l'annulation d'un certain produit scalaire.

Exercice 8.2

Un point M de coordonnées (x, y, z) est dans le plan étudié si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.

Exercice 8.3

Un point M de coordonnées (x, y, z) est sur la sphère étudiée si et seulement si $CM^2 = R^2$.
Un point M de coordonnées (x, y, z) est dans le plan étudié si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Exercice 8.4

Savoir faire ce genre d'exercice est indispensable en particulier pour les cours de physique, on vous demande d'être efficace et de savoir répondre rapidement à ce type de questions. Plusieurs techniques peuvent être utilisées, on pourra par exemple considérer le vecteur $\vec{u} = \dfrac{\vec{F}}{F}$ qui est un vecteur du cercle trigonométrique et faire le lien entre β et l'angle θ « habituel » (entre $\vec{e}_x$ et $\vec{u}$) tel que $\vec{u}$ ait pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On a ici $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \beta$.

PARTIE IV:

CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISION DU PROGRAMME DE TERMINALE S

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

La **factorisation** est immédiate, et on obtient donc directement les racines pour les équations 1 à 4 (il est important de s'entrainer à factoriser les expressions polynomiales et si possible sans calculer de Δ lorsque les racines sont évidentes). Ici, on a donné l'ensemble des racines réelles et complexes, la réponse à la question dépend du contexte de ce qui est demandé (le cas complexe étant le plus général).

1. $x^2+3x=0 \iff x(x+3)=0 \iff x=0$ *ou* $x=-3$
2. $x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff x=1$ *ou* $x=-1$
3. (identité remarquable) $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x=3$
4. 1 est racine evidente, on peut donc factoriser par $x-1$ et on obtient :
   $x^2-3x+2=0 \iff (x-1)(x-2)=0 \iff x=1$ *ou* $x=2$
5. identité remarquable avec $y=x^2$, puis une deuxième dans $\mathbb{C}$, car pour a,b réels, $a^2+b^2=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$
   $x^4+6x^2+9=0 \iff (x^2+3)^2=0 \iff (x+\mathrm{i}\sqrt{3})^2(x-\mathrm{i}\sqrt{3})^2=0 \iff x=\mathrm{i}\sqrt{3}$ *ou* $x=-\mathrm{i}\sqrt{3}$
6. $x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0$, ici 1 et 2 sont racines évidentes, et en développent $(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)$ puis en identifiant, on obtient $a=1$, $b=0$ et $c=2$
   d'où $x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0 \iff (x-1)(x-2)(x^2+2)=0 \iff x=1$ *ou* $x=2$ *ou* $x=\mathrm{i}\sqrt{2}$ *ou* $x=-\mathrm{i}\sqrt{2}$

Exercice 1.2

1. $(2x+1)(x+2)$ est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-1/2$ et -2, et dont le coefficient dominant est $2>0$, il est donc négatif ou nul entre les racines donc sur $[-2,-1/2]$ (faire un tableau de signe si besoin).
2. Le signe du quotient est le même que celui du produit, et -2 devient une valeur interdite, ainsi :
   $$\frac{2x+1}{x+2} \leqslant 0 \iff x \in]-2,-1/2]$$
3. Soit $x\in\mathbb{R}$, on factorise le polynôme (cf exercice 1.1 question 6.) : $x^4-3x^3+4x^2-6x+4=(x-2)(x-1)(x^2+2)$
   d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2+2		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x^4-3x^3+4x^2-6x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   D'où $x^4-3x^3+4x^2-6x+4>0$ si et seulement si $x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|x-9| \leqslant 2 &\iff -2 \leqslant x-9 \leqslant 2\\ &\iff 7 \leqslant x \leqslant 11\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $[7, 11]$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose que $x \neq -3$ et $x \neq 1$, on résout en mettant au même dénominateur :

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{(x-2)(x-1)-x(x+3)}{(x-1)(x+3)} \geqslant 0 \quad \iff \quad \frac{-6x+2}{(x-1)(x+3)} \geqslant 0$$

d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-6x+2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$\frac{-6x+2}{(x-1)(x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{3}, 1\right[$.

6. **Résolution de $1 \leqslant x^2 \leqslant 2$:** Immédiat grâce à la connaissance de la fonction $x \mapsto x^2$:
$1 \leqslant x^2 \leqslant 2 \iff -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1$ *ou* $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \iff x \in \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$

Résolution de $1 \leqslant \sqrt{3x^2-2} \leqslant 2$:
Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation n'a de sens que si $3x^2 - 2 \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$.

Supposons que $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$, on a

$$\begin{aligned}1 \leqslant \sqrt{3x^2-2} \leqslant 2 &\iff 1 \leqslant 3x^2-2 \leqslant 4 \text{ (les grandeurs considérées sont positives}\\ &\qquad\qquad \text{et la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } \mathbb{R}_+)\\ &\iff 3 \leqslant 3x^2 \leqslant 6\\ &\iff 1 \leqslant x^2 \leqslant 2\\ &\iff x \in \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]\end{aligned}$$

On fait l'intersection avec $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$
et on obtient l'ensemble des solutions : $\left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$.

Exercice 1.3

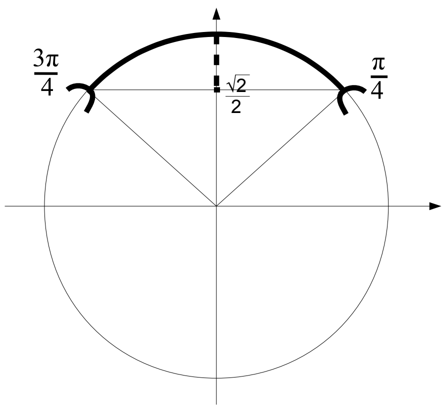
1. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$|-3x+4| = 7 \iff -3x+4 = 7$ *ou* $-3x+4 = -7 \iff \boxed{x = -1 \text{ ou } x = \frac{11}{3}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$|-3x+4| = |x+1| \iff -3x+4 = x+1$ *ou* $-3x+4 = -(x+1)$
$\iff -4x = -3$ *ou* $-2x = -5 \iff \boxed{x = \frac{3}{4} \text{ ou } x = \frac{5}{2}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, (la connaissance de la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une aide précieuse dans cette question)

$$\left|\frac{1}{x}-2\right| \leqslant 3 \iff -1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 5$$
$$\iff \boxed{x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[\frac{1}{5},+\infty\right[}$$

4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. Ici, on utilise le cercle trigonométrique. Plus que l'écriture de l'ensemble en lui-même, il faut s'entrainer à savoir résoudre ce genre d'inégalités avec le cercle trigonométrique.



✓ D'abord sur $[0,2\pi]$: $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4} \iff \boxed{x \in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right[}$

✓ Puis sur $\mathbb{R}$,

$$\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \boxed{x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[}$$

6. On connaît la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)$

   De plus $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ d'où $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

   Par ailleurs $\dfrac{\pi}{12} \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $3x+1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \in \left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$,

   On a $\sqrt{3x+1}-x > 0 \iff \sqrt{3x+1} > x$.

   Si $x \in \left[-\dfrac{1}{3},0\right[$ alors l'inégalité est vérifiée, étant donné que $x < 0$ et $0 \leqslant \sqrt{3x+1}$.

   Traitons le cas où $x \in \mathbb{R}_+$, dans ce cas, la fonction $t \mapsto t^2$ établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1} > x &\iff 3x+1 > x^2 \text{ (on élève au carré)}\\ &\iff x^2-3x-1<0 \iff x \in \left]\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[\\ &\overset{\text{or } x\geqslant 0}{\iff} x \in \left[0, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette inéquation : $\boxed{\left[-\frac{1}{3}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[}$.

8. Posons $X = \mathrm{e}^x$, on a

$$\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 6 - 11\mathrm{e}^x \iff \left(X = \mathrm{e}^x > 0 \;\; et \;\; X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0\right)$$

or 2 est racine évidente de $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ d'où $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-2)(X^2-4X+3)$,
de même 1 est racine évidente de $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$
d'ou $\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 6 - 11\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^x = 1$ *ou* $\mathrm{e}^x = 2$ *ou* $\mathrm{e}^x = 3$
On en déduit les solutions de l'équation : $\boxed{\{0,\ \ln(2),\ \ln(3)\}}$.

9. Cette équation n'a de sens que si $x-1>0$ et $x+1>0$ et $x>0$, c'est à dire si et seulement si $x \in]1, +\infty[$.
Soit $x>1$, $\ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln(x) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}\ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln(x) = 0 &\iff \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 1\\ &\overset{x^2\neq 0}{\iff} (x-1)(x+1) = x^2\\ &\iff x^2-1 = x^2 \text{ Impossible !}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cette équation n'a pas de solution}}$.

Exercice 1.4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x)+\cos(x) = 2\cos^2(x) - 1 + \cos(x)$
D'où

$$\begin{aligned}\cos(2x)+\cos(x) = -1 &\iff 2\cos^2(x)+\cos(x)-1 = -1 \iff 2\cos^2(x)+\cos(x) = 0\\ &\iff \cos(x)\left(2\cos(x)+1\right) = 0\\ &\iff \cos(x) = 0 \;\; ou \;\; \cos(x) = -\frac{1}{2}\\ &\iff \left(\exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \;\; ou \;\; \left(\exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\\ &\qquad ou \;\; \left(\exists k\in\mathbb{Z},\ x = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\end{aligned}$$

2. En divisant par 2, on reconnaît une équation du type $\cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0 &\iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = 0\\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = 0\\ &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6}+k\pi\end{aligned}$$

3. Posons $Y = \cos(x)$, l'inéquation devient
$2Y^2 + 3Y + 1 > 0 \iff (Y+1)(2Y+1) > 0 \iff Y \in]-\infty, -1[\cup]-1/2, +\infty[$
D'où

$$2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 > 0 \iff \cos(x) \in]-1/2, 1] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left]-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right[$$

4. En factorisant de nouveau le numérateur : $2Y^2 + 3Y + 1 = (2Y+1)(Y+1)$, on obtient

$$\frac{2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1}{2\cos(x) - 1} \leqslant 0 \iff \frac{(\sin(x)+1)(2\sin(x)+1)}{2\cos(x)-1} \leqslant 0 \iff \frac{2\sin(x)+1}{2\cos(x)-1} \leqslant 0$$

en effet, $\sin(x) + 1 \geqslant 0$ quelque soit x réel.
On effectue un tableau de signe :

	$0 + 2k\pi$		$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$		$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$		$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$		$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$		$2\pi + 2k\pi$
$2\cos(x) - 1$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|
$2\sin(x) + 1$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|
$\frac{2\sin(x)+1}{2\cos(x)-1}$	|	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|

Ceci nous donne l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left]\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

Exercice 1.5

✓ **Résolution de** (S_1) **:** on appelle E_1 et E_2 les équations de ce système.
Remplaçons l'équation E_1 par $E_2 + 3E_1$ soit $x = \frac{17}{7}$.
Remplaçons l'équation E_2 par $E_1 - 2E_2$ soit $y = \frac{-13}{7}$.

✓ **Résolution de** (S_2) **:** comme précédemment, on appelle E_1 et E_2 les équations de ce système.
Remplaçons l'équation E_1 par $E_1 - 2iE_2$ soit $y = 3i$.
Remplaçons l'équation E_2 par $3E_1 + (1+i)E_2$ soit $x = 1 + i$.

✓ **Résolution de** (S_3) **:** en substituant par exemple la valeur de z en fonction de x et y dans les deux premières équations, on peut résoudre le système à deux équations et deux inconnues, et on obtient $x = 1$, $y = -1$ et $z = 2$.

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 2.1

1. rien de tout cela
2. On a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. On a $e^{a+b} = e^a e^b$
4. rien de tout cela
5. On a $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
6. $0^0 = 1$ (convention)
7. On a $(x^a)^b = x^{ab}$

Exercice 2.2

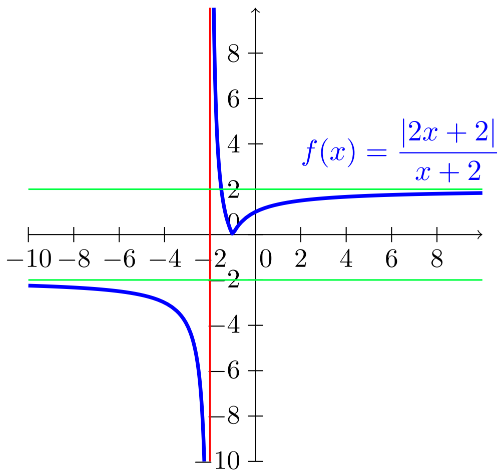
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite usuelle)
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ (forme qui n'est pas indéterminée)
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$ (limite usuelle)
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (limite usuelle)
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (limite usuelle)
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^{x+2} = 0$ (en effet : $x^3\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^2\big(x^3\mathrm{e}^x\big)$ + limite usuelle)
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite usuelle : c'est le taux d'accroissement en 1 de la fonction $f = \ln$, la limite est donc $f'(1) = 1$)
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$ (on pose $u = 3x$ on a $\dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ plus la limite ci-dessus)

Exercice 2.3

1. f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$.
2. **Etude de l'asymptote en $+\infty$:** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+2}{x+2} = 2$.
   Ainsi la courbe représentant f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = 2$.
   Etude de l'asymptote en $-\infty$: De manière analogue, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-(2x+2)}{x+2} = -2$.
   Ainsi la courbe représentant f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, la droite d'équation $y = -2$.
   Etude en -2 : On sépare la limite à gauche et à droite de -2, on obtient $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ (le numérateur tend vers 2 à gauche et à droite de -2 et le dénominateur tend vers 0^- en -2^- et vers 0^+ en -2^+).
   Ainsi la courbe représentant f admet une asymptote verticale en -2, c'est la courbe d'équation $x = -2$.
3. Si $x \leqslant -1$ avec $x \neq -2$, alors $|2x+2| = -(2x+2) = -2x-2$ et $f(x) = \dfrac{-2x-2}{x+2}$.
   Si $x > -1$, alors $|2x+2| = 2x+2$ et $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+2}$.
   Etudions les variations de la fonction :
   f est dérivable sur $]-\infty,-2[\cup]-2,-1]$ et pour $x \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1]$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^2}$, ainsi $f'(x) < 0$,
   f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$, ainsi $f'(x) > 0$,
   on obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

   On obtient le graphe de la fonction (les asymptotes sont également représentées) :

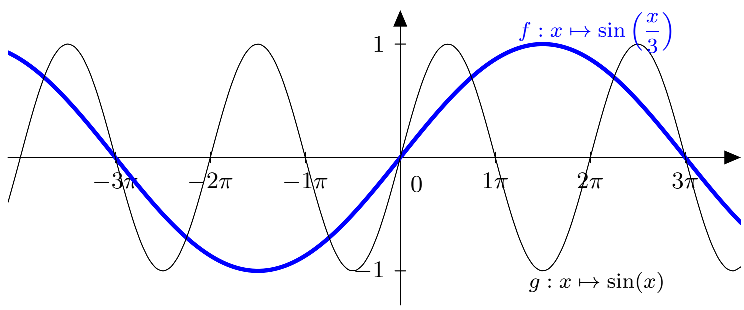


Exercice 2.4

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$
f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et de période 6π. Le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $[0; 3\pi]$.
Etudions les variations. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$\text{pour } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{3}\cos(\frac{x}{3})$$

Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ f' est positive donc f est croissante.
Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ f' est négative donc f est décroissante.
Le graphe de la fonction correspond à celui de la fonction sinus « dilaté » horizontalement par 3



Exercice 2.5

1. Considérons $f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$
   Pour que f soit définie, il faut que les expressions dans les logarithmes soient strictement positives.
   Le domaine de définition de f est donc $]-1, 1[$.
   Étude des variations :
   Soit $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$
   f' est donc positive sur l'intervalle d'étude, f est donc croissante de
   $$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$
   à
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$
2. Considérons $f(x) = \ln(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|)$.
   Pour que f soit définie, il faut que les expressions dans les logarithmes soient définies et soient strictement positives (avec la valeur absolue, ce deuxième point est équivalent à ce qu'elles soient non nulles).

Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Étude des variations :
Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$
f' est donc positive sur l'intervalle $]-1; 1[$ et négative sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$,
f est donc croissante sur $]-1; 1[$ et décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$.
Voici les limites aux bornes des intervalles précédents :
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$.

Remarque. Cette fonction coïncide avec la fonction de la question précédente sur l'intervalle $]-1, 1[$ mais elle est définie sur une partie plus grande de $\mathbb{R}$. Elle ne représente donc pas la même fonction !

Exercice 2.6

$f'(x) = (x+1)e^x$; $f''(x) = (x+2)e^x$.
On peut conjecturer que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.
Initialisation : Pour $n = 1$ on vérifie bien que $f^{(1)}(x) = (x+1)e^x$
Hérédité : Si on suppose la propriété vraie au rang n,

$$f^{(n+1)}(x) = ((x+n)e^x)' = (x+n)e^x + e^x = (x+n+1)e^x$$

ce qui établit la propriété au rang $n+1$.
Conclusion : Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée nième de f est définie par :

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

Remarque : la propriété est également vraie pour $n = 0$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$

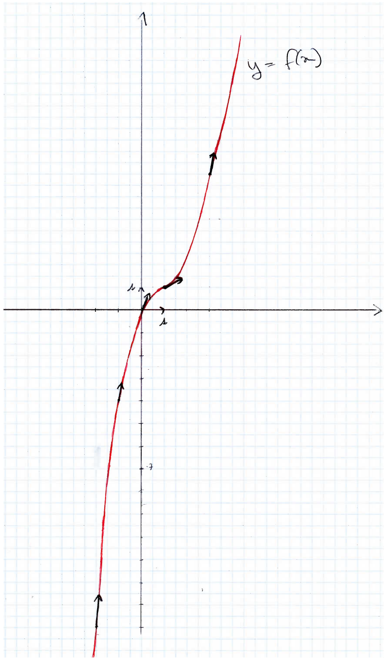
Exercice 2.7

Domaine de définition, domaine de dérivabilité :
f est une fonction polynomiale, elle est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcul de la dérivée et étude de son signe :
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2 - 6x + 4\right)$
Cette fonction polynomiale de degré 2 à un discriminant négatif donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
f est donc strictement croissante.
Tableau de variation avec limites aux bornes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Jusque là, c'était facile ! !
Pour tracer une allure correcte de la fonction, on s'attachera à considérer un certain nombre de valeurs de x pour lesquelles on calcule les valeurs de f et de f' (comme cela, on dispose de la pente de la tangente), attention cependant à ne pas perdre trop de temps...

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	-14	-4	0	1	6
$f'(x)$	14	$\frac{13}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$



Exercice 2.8

1. **Étude de $f : x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.**

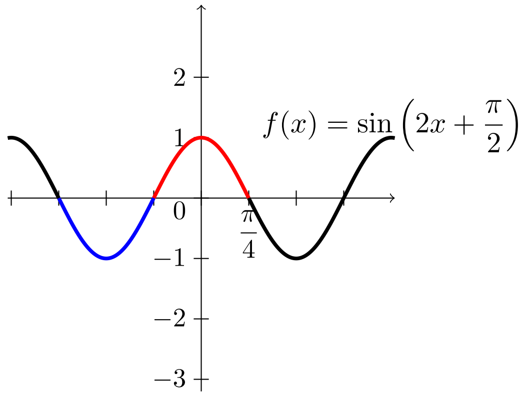
Domaine de définition : f est définie sur $\mathbb{R}$ *Domaine de dérivabilité :* f est la composée d'une fonction affine et de la fonction sinus qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Domaine d'étude : f est périodique de période π, on peut donc l'étudier sur un intervalle de longueur π. De plus on a $f(x) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, on obtient donc facilement le graphe de f à partir de celui de la fonction sinus : il est « réduit de moitié » et « décalé » de $-\frac{\pi}{4}$.
La fonction sin étant impaire, son graphe présente une symétrie par rapport à l'origine, comme ici, on a un décalage de $-\frac{\pi}{4}$, on peut choisir un intervalle centré en $-\frac{\pi}{4}$ de longueur π : $\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right]$ et faire l'étude de la fonction sur la motié de cet intervalle puis utiliser la symétrie de la courbe. On peut ainsi étudier la fonction sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Étude des variations : Ici, le calcul de la dérivée est inutile, aux vues des considérations précédentes, je le donne quand même pour que vous puissiez vérifier les votres :
Soit $x \in D_f$,

$$f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Graphe sur $[-\pi, \pi]$: On dessine le graphe sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ puis on effectue la symétrie de la courbe sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et enfin, on complète par périodicité...



*Remarque.*On pouvait également remarquer que $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$:-)

2. **Étude de $g : x \mapsto \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ (identité remarquable), ainsi :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{(3x-1)^2} = |3x - 1|$.
g est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

✓ lorsque $3x - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$, $g(x) = 3x - 1$

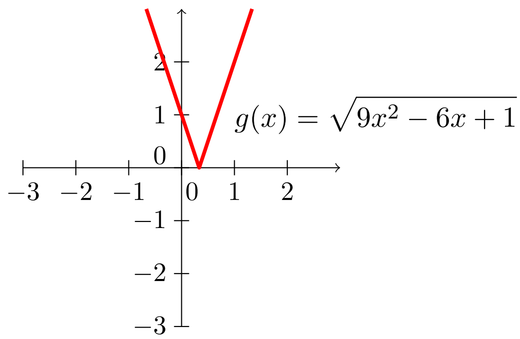
✓ lorsque $3x - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $g(x) = -3x + 1$

C'est une fonction affine par morceaux (deux demi-droites).
Il n'est pas très utile d'étudier le signe de la dérivée ici étant donné qu'il s'agit de deux demi-droites, je rédige le calcul pour que vous puissiez comparer au cas où vous l'auriez fait : g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et (on n'a pas d'autre choix que de séparer les cas) :

✓ lorsque $3x - 1 > 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$, $g'(x) = 3$

✓ lorsque $3x - 1 < 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, $g(x) = -3$

Graphe de g :



Exercice 2.9

1. f est définie au point x si et seulement si $2x + 1 > 0$ c'est-à-dire sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

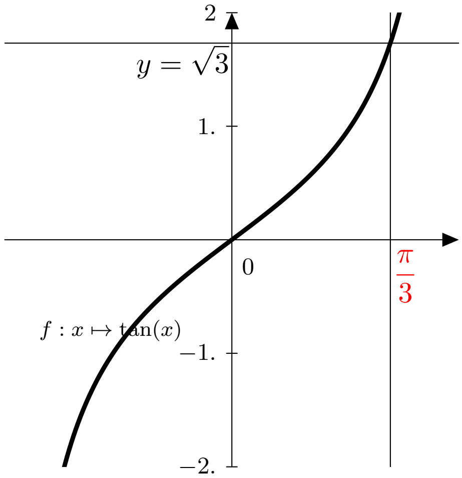
   Elle est dérivable sur son domaine de définition et pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$.

2. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -2\cos(\pi - 2x)$.

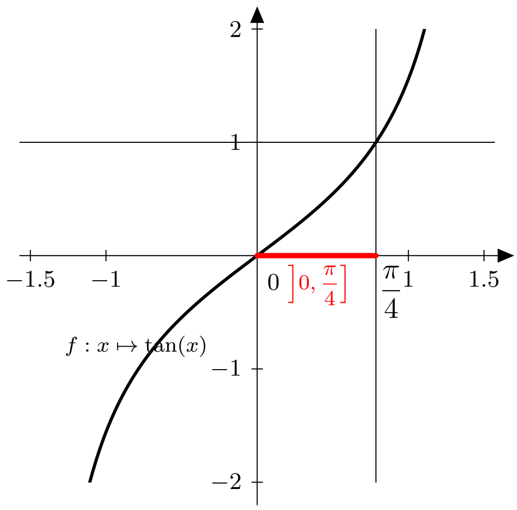
Exercice 2.10

1. La fonction tan est définie si et seulement si $\cos(x)$ ne s'annule pas, donc pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Son domaine de définition est donc :
$$D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$
2. la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition.En utilisant la dérivée d'un quotient, on obtient :
$\tan'(x) = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)^2}{\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
Mais si on sépare en deux fractions, on obtient une autre expression de la dérivée de la fonction tan.
$\tan'(x) = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Remarque : Il est important de retenir la relation :
$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
ainsi, il existe un lien direct entre tangente et cosinus.
3. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la dérivée de la fonction tan est positive donc la fonction est strictement croissante.
les limites en $lim_{-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $lim_{\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.
Cela signifie que la courbe représentative de la fonction tan admet deux asymptotes verticales en $x = -\frac{\pi}{2}$ et en $x = \frac{\pi}{2}$.
On pourra retrouver le graphe de la fonction tangente p.15, on trace d'abord la courbe sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *puis on utilise la parité pour avoir l'ensemble de la courbe.*

4. La fonction tan est périodique , de période π.
$$\forall x \in D, \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$
On peut remarquer que la fonction tan est aussi impaire :(Cela découle directement de la parité de la fonction cos et de l'imparité de la fonction sin).
$$\forall x \in D, (-x) \in D; et; \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$
5. Du fait de la période π de la fonction tan, les variations de tan sur les intervalles $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et$]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ sont identiques.
6. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation $\tan(x) = \sqrt{3}$ admet une solution unique : $x = \frac{\pi}{3}$ (c'est une valeur à connaître).



7. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'inéquation $0 < \tan(x) \leqslant 1$ admet pour solution l'ensemble des x de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{4}[$.



3 Suites numériques

Exercice 3.1

✓ Pour tout entier n,

$$u_n - 4 = \frac{(2n+3)(2n+1)}{(n+1)^2} - 4 = \frac{(2n+3)(2n+1) - 4(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

ainsi $u_n - 4 < 0$ et donc $u_n < 4$.

✓ Pour étudier les variations.
calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+3)[(2n+5)(n+1)^2 - (2n+1)(n+2)^2]}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0$$

La suite est donc strictement croissante.

✓ Un calcul simple de limite permet de voir qu'elle converge vers 4.

Exercice 3.2

1. $\sin(n)$ étant compris entre -1 et 1, on obtient

$$1 + \frac{-1}{n} < 1 + \frac{\sin(n)}{n} < 1 + \frac{1}{n}$$

Ainsi pour $n \geqslant 1$ $1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant 0$.

2. De plus, $1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$ donc $u_n \leqslant 2$ ce qui prouve que la suite est majorée et comme on a montré à la question précédente qu'elle est minorée, cela prouve que la suite est bornée.
En utilisant le théorème de gendarmes, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{-1}{n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

donc la suite (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3.3

1. La solution de l'équation est $a = 3/2$.
2. Posons alors $u_n = v_n - 3/2$.
   En reportant dans la relation de récurrence, nous obtenons :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$$
3. (u_n) est ainsi une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme. $u_0 = v_0 - 3/2 = -1/2$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
4. $v_n = u_n + 3/2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$.
5. La suite (u_n) tend vers 0 ainsi la limite de la suite (v_n) est donc $3/2$.

Exercice 3.4

Pour tout entier n, posons $P(n)$:$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n^2)(n+1)^2}{4}$

Initialisation : Pour $n = 1$:$\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\dfrac{(1^2)(1+1)^2}{4} = 1$ donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité : Supposons, que pour un entier n donnée, $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vrai.
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{(n^2)(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{(n^2)}{4} + (n+1)) = \frac{(n+1)^2)(n+2)^2}{4}$$
Ainsi : $P(n+1)$ est vrai.

Conclusion : Pour tout entier n non nul :$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n^2)(n+1)^2}{4}$

Exercice 3.5

1. C'est un exercice classique de TS.
2. On obtient $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$.
3. Cette suite a pour limite $1/2$ (en factorisant au numérateur et au dénominateur par n^2, ou en utilisant les résultats sur les fractions rationnelles).

Exercice 3.6

1. Pour tout entier n : $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$
   $v_0 = u_0 + 6 = 8$.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 8.
2. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$.
   La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : -6.

4 Trigonométrie

Exercice 4.1

Voir le formulaire de trigonométrie ainsi que celui sur les fonctions usuelles (sinus, cosinus et tangente). Il est important de bien connaître ces formulaires et de savoir utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver très vite les relations en cas de doute.

Exercice 4.2

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
3. En ajoutant ces deux équations, on obtient $\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$, la formule cherchée est obtenue en divisant par 2.
4. En soustrayant les équations des questions 1. et 2., on obtient : $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$...
5. Le travail est analogue avec $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

Exercice 4.3

Voir le formulaire de trigonométrie (même remarque que dans l'exercice précédent).

Exercice 4.4

Soit $x \in \mathbb{R}$, il y a plusieurs possibilités :

✓ par exemple en utilisant les formules développant $\cos(a+b)$ puis $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$
$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

✓ voici une technique qui se généralise à toutes les puissances de sinus et cosinus (on la reverra mais il est intéressant de commencer à la manipuler) : on utilise $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ pour développer $\cos^3(x)$: en élevant au cube,

$$\cos^3(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{2^3} = \frac{(e^{3ix}+3e^{-ix}+3e^{ix}+e^{3ix})}{2^3} = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3\cos(x)}{4}$$

Pour $\sin(3x)$, on obtient : $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

Exercice 4.5

Voir le formulaire.

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

✓ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = [\frac{\ln|x^3+1|}{3}]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$.
On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$

✓ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = [-\ln|\cos(x)|]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln(2)$. On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$

✓ $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_{0,5}^1 = -1/2\,(\ln(1/2))^2 = -\frac{(\ln(2))^2}{2}$. On reconnait la forme $u'u$

✓ $\displaystyle\int_0^1 e^{3u}du = \left[\frac{(e^{3u})}{3}\right]_0^1 = \frac{e^3-1}{3}$.

✓ $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{2}{3x-1}dx = \left[\frac{2}{3}\ln|3x-1|\right]_{-2}^0 = -\frac{2}{3}\ln(7)$.

Exercice 5.2

1. f_1 est continue sur $]-\infty, 1[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle, de même, elle est continue sur $]1, +\infty[$ donc elle admet également des primitives sur cet intervalle.
   Attention, pour calculer des primitives, il faut se placer sur un intervalle, la constante d'intégration et le calcul pouvant être différent sur chaque intervalle considéré.
   De plus pour $x \in]-\infty, 1[$ ou $x \in]1, +\infty[$, on a $f_3(x) = -\dfrac{1}{x-1}$, or $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est de la forme u'/u dont les primitives sont de la forme $\ln|u| + cste$.

   Les primitives de f_1 sont donc les fonctions définies par :

   $$\begin{cases} x \longmapsto -\ln\big(|x-1|\big) + C_1 \text{ si } x < 1 \\ x \longmapsto -\ln\big(|x-1|\big) + C_2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

   où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles qui peuvent être distinctes.
2. La fonction f_2 admet des primitives sur l'intervalle $\left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$ ainsi que sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.
   Sur chacun de ces intervalles est de la forme u'/u^n, on peut donc calculer ses primitives directement, ce sont les fonctions qui s'écrivent :

   $$x \mapsto \frac{-\frac{1}{3}}{3x+1} + C_1 \quad \text{sur} \quad \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$$

   $$x \mapsto \frac{-\frac{1}{3}}{3x+1} + C_2 \quad \text{sur} \quad \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

   avec C_1 et C_2 deux constantes réelles.
3. f_3 est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, ainsi les primitives de f_3 sont de la forme :

   $$F_3 : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
4. En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient pour $x \in \mathbb{R}$:
   $f_4(x) = \sin(4x)\cos(3x) = \dfrac{1}{2}(\sin(7x) + \sin(x))$
   f_4 admet des primitives sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur cet intervalle et si on note F_4 une primitive de f_4, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$F_4(x) = -\frac{1}{14}\cos(7x) - \frac{1}{2}\cos(x) + C$$

6 Nombres complexes

Exercice 6.1

$|a| = 1,\ Arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$;$|b| = 1,\ Arg(b) = \dfrac{2\pi}{3}$
$|a^3| = |a|^3 = 1,\ Arg(a^3) = 3;\ Arg(a) = 3\dfrac{\pi}{3} = \pi$;
$|ab| = |a||b| = 1,\ Arg(ab) = Arg(a) + Arg(b) = \pi$
$a + b = i\sqrt{3}$,$Arg(a+b) = \pi/2$ $|a+b| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.
$|a/b| = |a|/|b| = 1,\ Arg(a/b) = Arg(a) - Arg(b) = -\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 6.2

Le calcul du module et de l'argument principal ($z = 1 + i$ est situé sur la bissectrice d'équation $y = x$, ce qui donne l'argument principal sans calculs) permet de trouver : $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4[2\pi]$.
Pour $z = 1 - i$ situé sur le deuxième bissectrice d'équation $y = -x$, on obtient $r = \sqrt{2}$ et $\theta = -\pi/4[2\pi]$.

Exercice 6.3

Soient $Z = 2 + 2i$ et $Z' = 1 + i\sqrt{3}$.

1. $|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; ainsi $Z = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

   Z a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

   $|Z'| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ ainsi $Z' = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

   Z' a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2. En utilisant les propriétés de modules et arguments :

$$|\frac{Z}{Z'}| = \frac{|Z|}{|Z'|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

   $Arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = Arg(Z) - Arg(Z') = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$ à $2k\pi$ près .

   $Z'^3 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = 8e^{i\pi} = -8$. Z'^3 a pour module 8 et pour argument π (modulo 2π).

Exercice 6.4

$f(1+i) = \frac{1+i-i}{1+i+i} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$.

Remarquer que : $e^{i\pi} = -1$ ainsi $f(e^{i\pi}) = f(-1) = \frac{-1-i}{-1+i} = (-1-i)^2/2 = i$.

$f(1+i\sqrt{3}) = \frac{1+i\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}+i} = \frac{1+i(\sqrt{3}-1)}{1+i(\sqrt{3}+1)}$

Pour déterminer les antécédents de 2 par f, on résout l'équation $f(z) = 2$ soit $\frac{z-i}{z+i} = 2$.
La solution unique est $z = -3i$.

7 Calculs algébriques.

L'important est d'être rapide dans la réalisation de vos calculs.

Exercice 7.1

$$\frac{1 + \frac{x+1}{x+3}}{x+4} = \frac{\frac{x+3+x+1}{x+3}}{x+4} = \frac{2x+4}{(x+3)(x+4)}$$

Exercice 7.2

$$\frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{\frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy+z(x+y)}{1+xy}} = \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+z(x+y)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}$$

Exercice 7.3

Vous connaissez l'égalité remarquable $(a+b)^2$, elle peut se généraliser au carré de la somme de trois termes et plus .
Ici c'est l'occasion de développer $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
En développant, vous obtenez la somme des trois carrés et la somme de tous les doubles produits.
Avec cette observation, vous devez être capable de développer directement :$(a+b+c+d)^2$,$(a+b+c+d+e)^2$...
Le calcul demandé devient en tenant compte des signes+ et $-$:

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

Exercice 7.4

Rappelez vous que vous devez bien maîtriser les formules de trigonométrie.
Plus de formulaire ou de calculatrice pour vos partiels.
$1+\sin(2y) = \sin^2(y)+\cos^2(y)+2\sin(y)\cos(y) = (\sin(y)+\cos(y))^2$
De même :
$1-\sin(2y) = \sin^2(y)+\cos^2(y)-2\sin(y)\cos(y) = (\sin(y)-\cos(y))^2$
Rappelez vous aussi que $\sqrt{x^2} = |x|$, on a $\sqrt{x^2} = x$ que si x est positif.
Ainsi l'expression demandée s'écrit :

$$|\sin(y)+\cos(y)| + |\sin(y)-\cos(y)|$$

Quand $y \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(y) \le \sin(y)$ et

$$|\sin(y)+\cos(y)| + |\sin(y)-\cos(y)| = \sin(y)+\cos(y)+(\sin(y)-\cos(y) = 2\sin(y)$$

Quand $y \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\sin(y) \le \cos(y)$ et

$$|\sin(y)+\cos(y)| + |\sin(y)-\cos(y)| = \sin(y)+\cos(y)+(-\sin(y)+\cos(y)) = 2\cos(y)$$

Quand $y = \frac{\pi}{4}$, $\sin(y) = \cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$$|\sin(y)+\cos(y)| + |\sin(y)-\cos(y)| = \sqrt{2}$$

8 Géométrie

Exercice 8.1

1. La condition se traduit par le fait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ soit $(a-1)+4+25=0$
2. D'où $a = -28$.
3. Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse $[B,C]$: le point de coordonnées $(-13;0;-2)$.

Exercice 8.2

Si $M(x,y,z)$ est un point de ce plan , cela équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0$ soit : $x+2(y-1)+3z = 0$ soit en simplifiant :$x+2y+3z=2$.

Exercice 8.3

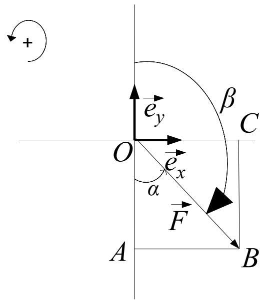
Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $C(1,1,1)$ de rayon $R=3$.
$M(x,y,z)$ est un point de cette sphère , équivaut à $(\overrightarrow{CM})^2 = R^2 = 9$ soit : $(x-1)^2+(y-1)^2)+(z-1)^2 = 9$.

Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à cette sphère passant par le point $A(0;3;3)$.
C'est en fait la plan perpendiculaire à $[CA]$, passant par A. $M(x,y,z)$ est un point de ce plan , équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CA} = 0$ soit : $-x+2(y-3)+2(z-3) = 0$.soit en simplifiant $-x+2y+2z=12$

Exercice 8.4

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice.

Première méthode : Celle à laquelle vous aurez sans doute pensé est d'utiliser le triangle rectangle et la définition de sinus et cosinus à l'aide des côtés du triangle



On note OB la distance entre les points O et B (et de manière analogue, OA et OC).
On a $\vec{F} = \overrightarrow{OB} = OC\vec{e}_x - OA\vec{e}_y$ (attention au signe $-$ pour la coordonnées selon $\vec{e}_y$).

On a $\cos(\alpha) = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA}{F}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{OC}{F}$
ainsi $\vec{F} = OC\vec{e}_x - OA\vec{e}_y = F\sin(\alpha)\vec{e}_x - F\cos(\alpha)\vec{e}_y$.
Or $\alpha - \beta = \pi$, ainsi $\alpha = \pi + \beta$ ce qui donne :
$\cos(\alpha) = \cos(\pi + \beta) = -\cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) = \sin(\pi + \beta) = -\sin(\beta)$

On obtient donc : $\vec{F} = -F\sin(\beta)\vec{e}_x + F\cos(\beta)\vec{e}_y$

Autre méthode : Une façon « **plus matheuse** » de voir cet exercice est de penser au cercle trigonométrique : considérons le vecteur $\vec{u} = \vec{F}/F$. Et on note θ l'angle formé entre le vecteur $\vec{e}_x$ et $\vec{u}$
Ainsi $\vec{u}$ est un vecteur de norme 1, correspondant au nombre complexe $e^{i\theta}$ c'est-à-dire dont les coordonnées sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, ainsi $\vec{u} = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$.

Ensuite, on relie θ et β. Ici $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \beta$, on a donc or $\cos(\theta) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + \beta) = -\sin(\beta)$
et $\sin(\theta) = \sin(\dfrac{\pi}{2} + \beta) = \cos(\beta)$
On obtient donc $\vec{u} = -\sin(\beta)\vec{e}_x + \cos(\beta)\vec{e}_y$.

Et en multipliant par la norme : $\vec{F} = -F\sin(\beta)\vec{e}_x + F\cos(\beta)\vec{e}_y$

E xercice 9

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10%, 40% et 50% de la production totale de son usine.

Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5% pour la machine A, de 1,5% pour la machine B et de 2,2% pour la machine C.

Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines. On choisit au hasard un berlingot dans le bac.
On notera :

- « O » pour l'événement le berlingot est défectueux
- « X » pour l'événement le berlingot est correct
- « A » pour l'événement le berlingot a été fabriqué par la machine A
- « B » pour l'événement le berlingot a été fabriqué par la machine B
- « C » pour l'événement le berlingot a été fabriqué par la machine C

L'énoncé nous indique que :

$P_A(X) = 3{,}5\%$ $P_B(X) = 1{,}5\%$ $P_C(X) = 2{,}2\%$ $P(A) = 0{,}1$ $P(B) = 0{,}4$ $P(C) = 0{,}5$

Attention aux notations : $P_A(X)$ indique la probabilité conditionnelle de l'événement X sachant A

1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.

Par **probabilité conditionnelle**, on a : $P(C \cap X) = P(C) . P_C(X) = 0{,}5 . 0{,}022 = 0{,}011 =$ **1,1 %**

2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.

D'après la **formule des probabilité totales** :

$P(X) = P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X) = P_A(X).P(A) + P_B(X).P(B) + P_C(X).P(C) = 0{,}35\% + 0{,}6\% + 1{,}1\% =$ **2,05 %**

3. Caculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.

On applique la **formule de Bayes** (dite « formule de la probabilité des causes »:

$P_X(C) = P(X \cap C) / P(X) = P_C(X) . P(C) / P(X) = 2{,}2\% * 50\% / 2{,}05\% =$ **53,6%**

4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

P(Au moins 1 X) = 1 – P(Aucun X) = $1 - (1 - P(X))^{10}$ car il y a remise et chaque tirage est dès lors indépendant

Donc P(Au moins 1 X) = $1 - (1- 2{,}05\%)^{10}$ = **18,8%**