Partie II : Documents et Formulaires

Alphabet grec

Les lettres grecques sont employées très fréquemment en sciences, il faut donc les connaître afin d'éviter les mal-entendus lors des cours.

minuscule	majuscule	nom	minuscule	majuscule	nom
α		alpha	ν		nu
β		bêta	ξ	Ξ	xi ou ksi
γ	Γ	gamma	o		omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε		epsilon	ρ		rho
ζ		zêta	σ	Σ	sigma
ι		iota	τ		tau
κ		kappa	χ		chi (se dit « ki »)
λ	Λ	lambda		Ψ	psi
μ		mu	ω	Ω	omega

NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique $z = x + iy$.
F orme trigo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,
For me exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.
$|z|$ est le *module* de z, et θ est *un argument* de z.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\overline{z}, \quad \text{et} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0).$$

Conjugué : $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$
Propriétés du module :

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |1/z| = 1/|z|, \quad |zz'| = |z|.|z'|$$

Propriétés de l'argument :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg(1/z) = -\arg z \quad [2\pi], \quad \arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

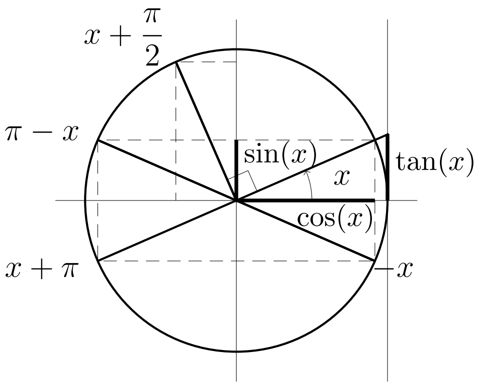
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = 0$, une solution $z = \frac{-b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes $z = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exponentielle complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

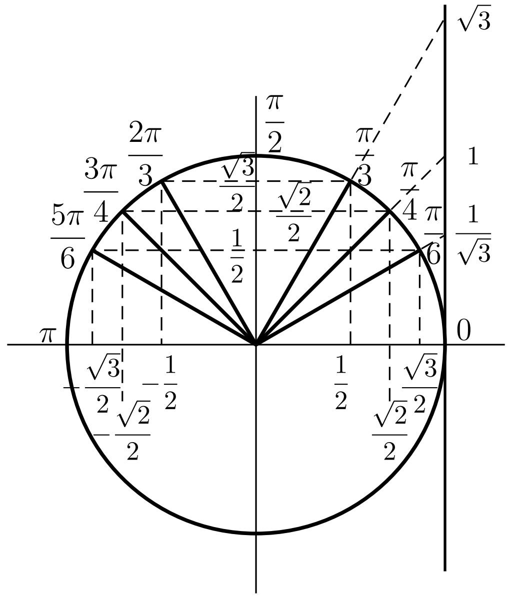
Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Trigonométrie



tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(x+\pi) = \tan(x)$
$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(x)}$



Formules à connaître par cœur.

✓ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

✓ $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

✓ **Formules d'addition :**

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

✓ **Angle double (a=b) :**

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules à connaître ou savoir retrouver.

✓ **Linéarisation :** *(se déduisent de* $\cos(2a)\ldots$ *)*

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

✓ **Transformation de produit en somme :**
(se déduisent des formules d'addition)

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$

✓ **Transformation de somme en produit :**
(se déduisent des formules d'addition)

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

✓ **Transformation en fraction rationnelle :**
(se déduisent de $\tan(2a) = \ldots$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *et* $1+\tan^2(a) = \ldots$ *)* on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

RÉSUMÉ SUR LES FONCTIONS USUELLES

1 Fonction valeur absolue

Définition 1.1

La fonction valeur absolue, *notée* $|\ |$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pour x et a deux réels,
$|x|$ représente la distance entre le point d'affixe x et l'origine
$|x-a|$ représente la distance entre le point d'affixe x et le point d'affixe a.

Pour résoudre une équation du type $|a| = b$, on utilise l'équivalence suivante

$$|a| = b \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

Exemple : Résolution de l'équation $|2x-1| = 4$:

$$\begin{aligned} |2x-1| = 4 &\iff 2x-1 = 4 \text{ ou } 2x-1 = -4 \\ &\iff 2x = 5 \text{ ou } 2x = -3 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Pour résoudre une équation du type $|a| \leqslant b$, on utilise l'équivalence suivante (méthode à adapter pour les autres cas de figure)

$$|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$$

Proposition 1.2

La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Si on note $f : x \mapsto |x|$, on a :

$$f \ : \ x \longmapsto \begin{matrix} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{matrix} \qquad f' \ : \ x \longmapsto \begin{matrix} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{matrix}$$

2 Fonctions logarithme et exponentielle

Définition 2.1

$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est la primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *qui s'annule en* 1.

Proposition 2.2

1. $\ln$ *est une bijection*[1] *de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \big(\ln\big)'(x) = \frac{1}{x}$$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

[1] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Définition 2.3

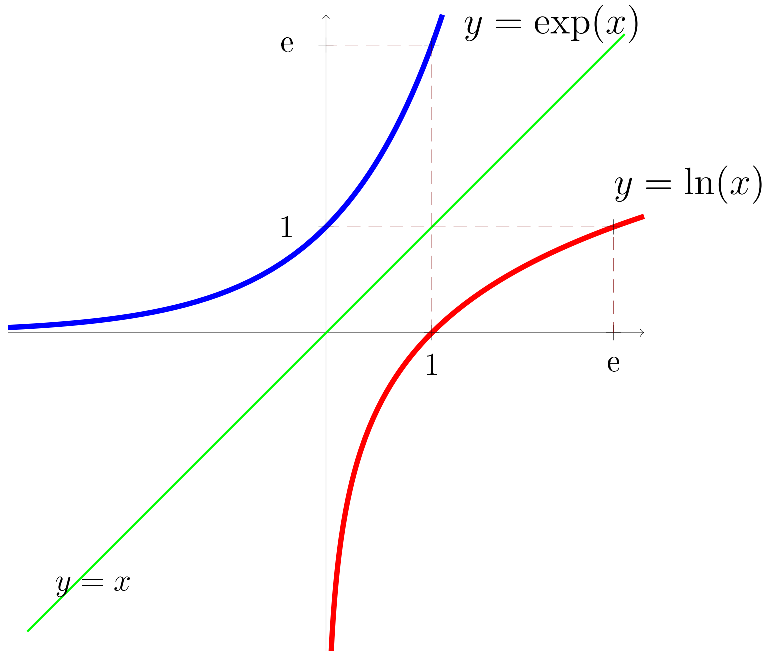
La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est la bijection réciproque*[2] *de* $\ln$.

Proposition 2.4

1. $\exp$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction exponentielle.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition 2.5

1. $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
   $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$



3 Fonctions puissances

Ces notions seront reprises et approfondies lors du chapitre « Bases d'Analyse ».

Définition 3.1 (***Puissances entières d'exposant positif***)

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on définit :* $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$, $\ldots$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = x \times x^{n-1}$

Définition 3.2 (***Puissances entières d'exposant négatif***)

Soit $x \in \mathbb{R}$, *pour* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit :*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

[2] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Racine n-ième

1. **Cas des racines carrées** : Pour $x > 0$, l'équation : $t^2 = x$ admet deux solutions réelles de signe opposé, et on pose $\sqrt{x}$ l'unique solution qui est positive.
   Ainsi, pour x et t **réels positifs** : $\left(t^2 = x \text{ et } t \geqslant 0\right) \iff t = \sqrt{x}$
2. **Cas des racines cubique** : Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $t^3 = x$ admet une unique solution réelle, on pose $\sqrt[3]{x}$ l'unique solution de cette équation. Ainsi, pour x et t **réels** : $t^3 = x \iff t = \sqrt[3]{x}$

Définition 3.3 (***Racine n-ième***)

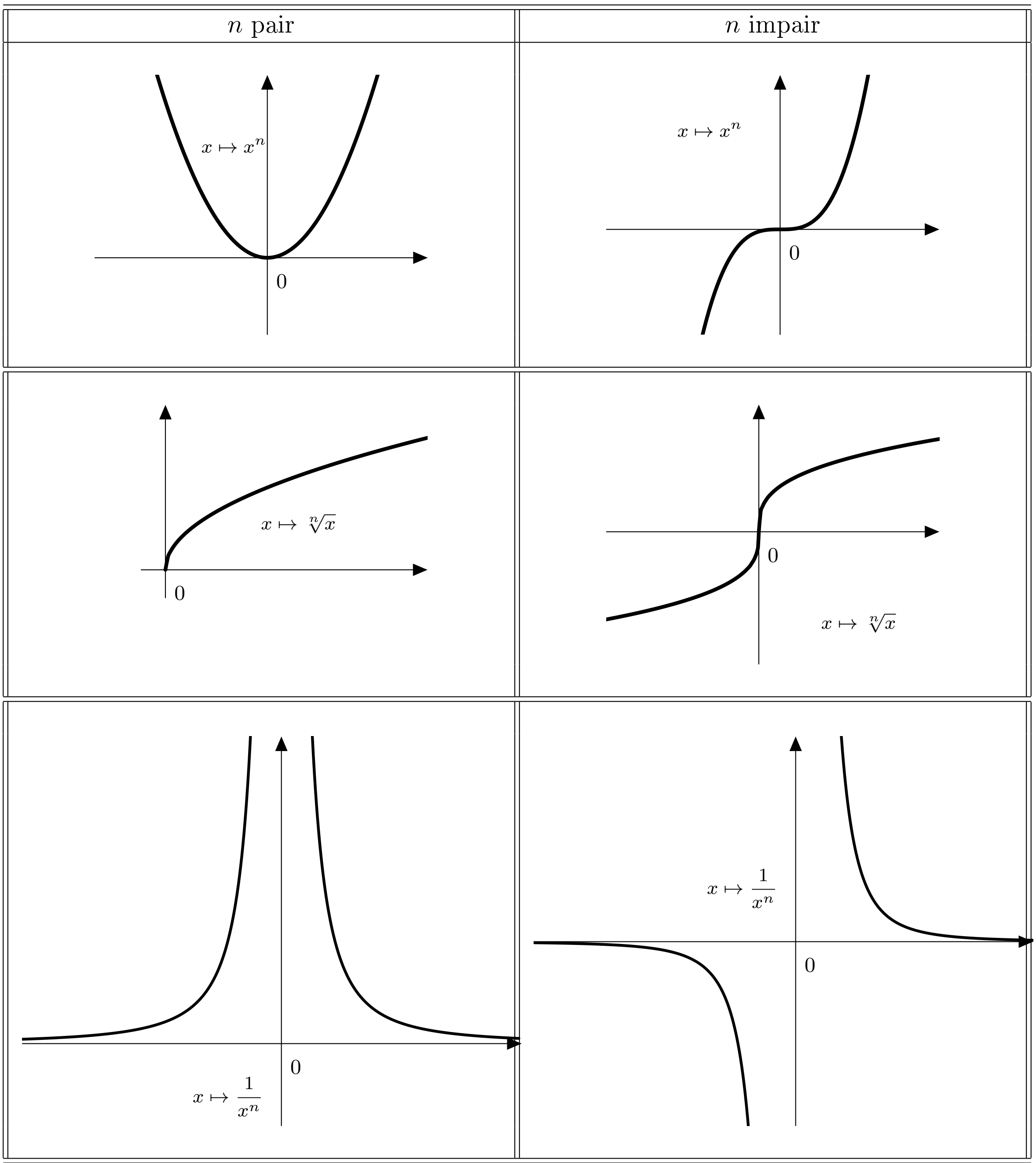
1. *Pour n entier positif **impair**, on définit la fonction racine $n-$ ième sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel solution de l'équation $t^n = x$.*
2. *Pour n entier positif **pair**, on définit la fonction racine $n-$ ième sur $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante : pour $x \geqslant 0$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel **positif** solution de l'équation $t^n = x$.*

De plus, on pourra noter que : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

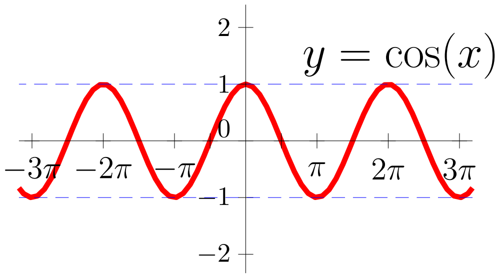
Dérivée des fonction puissances : lorsque la fonction est dérivable et pour α constante, on a

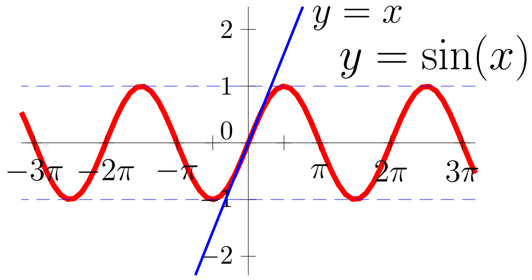
$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

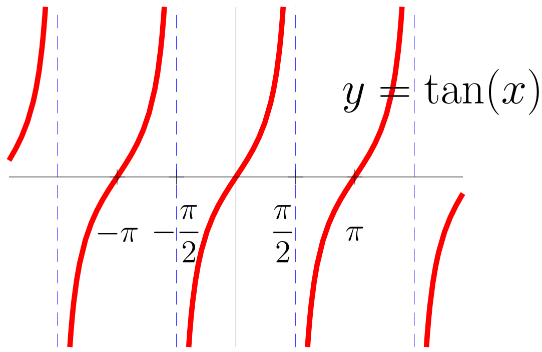
Allure des courbes Soit $n \in \mathbb{N}^*$,



4 Fonctions trigonométriques







- ✓ cos et sin sont 2π-périodiques
- ✓ cos et sin sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

- ✓ tan est π-périodique
- ✓ tan est définie, continue et dérivable sur $D_{\tan} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + p\pi, \frac{\pi}{2} + p\pi\right[$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

5 Dérivées - Primitives

Fonction	**Dérivée**	**Fonction**	**Dérivée**
x^p	px^{p-1}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
uv	$u'v + uv'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$	e^u	$u'e^u$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$(1 + \tan^2(x))$	$v \circ u$	$u' \times v' \circ u$

Fonction	**Primitive**	**Fonction**	**Primitive**
a	$ax + b$	u'	$u + b$
x	$\frac{1}{2}x^2 + b$	$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + b$
$\frac{1}{x}$	$ln(\|x\|) + b$	$\frac{u'}{u}$	$ln(\|u\|) + b$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + b$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + b$
x^a, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + b$	$u'u^a$, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1} + b$
e^{ax+b} avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$u'e^u$	e^u

Si f est continue sur [a, b]: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Relation de Chasles. $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$.

Limites usuelles

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynomes) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

✓ La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degré

✓ Les limites suivantes sont obtenue à l'aide de la définition du nombre dérivé (ce sont les limites d'un taux d'accroissement) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

✓ Croissance comparée exponentielle/puissance et logarithme/puissance en $+\infty$ et $-\infty$:

- pour tout $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^m e^{\alpha x} = 0$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(x)\big)^m}{x^n} = 0$

✓ Croissance comparée logarithme / puissance en 0^+ :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\big(\ln(x)\big)^m = 0$

PROPRIETE DE LA CROISSANCE COMPAREE POUR CALCULER UNE LIMITE:
"LORSQU'IL Y A INDETERMINATION: *L'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances l'emportent sur le logarithme* "

IDENTITES REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \qquad (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2.$$

SOMMES CLASSIQUES

Somme d'une suite arithmétique:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme d'une suite géométrique:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & si\ q \neq 1 \\ n+1\,, & si\ q = 1 \end{cases}$$

Espérance d'une variable aléatoire finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Loi de Bernoulli : $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Loi uniforme entre 1 **et** n : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$, pour k entre 1 et n.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n$.

Probabilité de A **sachant** B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$