Cahier de calcul

— pratique et entraînement —

La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Adaptation BCPST

Carine Courant, Elodie Maillet

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas Bardavid pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de
https ://www.freeimg.net/photo/512455/fibonacci-geometry-mathematics-nautilus

Version UPA — 13 juillet 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Enfin, quelques fiches portant sur le programme de deuxième année : les chapitres nécessaires sont clairement indiqués.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `carine-marjorie.courant@ac-lyon.fr`.

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

001A

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.
Dès le début de 1ère année.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ..

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$. ....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2}k}{\sum\limits_{k=0}^{n}k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1+2+\cdots+p=\dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\dfrac{b}{c}$ avec $b<c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ...... b) $\dfrac{k}{k-1}$ ... c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B=\big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\dfrac{3}{5}\dots\dfrac{5}{9}$ .... b) $\dfrac{12}{11}\dots\dfrac{10}{12}$ ...... c) $\dfrac{125}{25}\dots\dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A=\dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B=\dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A=\dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B=\dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A>B$, $A=B$ ou $A<B$? ....

▶ Réponses et corrigés page 65

Fiche de calcul n° 2 **002A**

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.
Dès le début de 1ère année

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

► Réponses et corrigés page 68

Fiche de calcul n° 3

003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables !
Dès le début de 1ère année.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big) - (2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 + 4x + 4$ ....

c) $x^2 + 3x + 2$ ....

d) $3x^2 + 7x + 1$ ....

e) $2x^2 + 3x - 28$ ....

f) $-5x^2 + 6x - 1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$ ....

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ....

c) $xy + x + y + 1$ ....

d) $xy - x - y + 1$ ....

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..

f) $y^2\big(a^2 + b^2\big) + 16x^4\big(-a^2 - b^2\big)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$ ....

b) $\big(-9x^2 + 24\big)\big(8x^2 + 8\big) + 64x^4 - 64$ ....

c) $x^4 + x^2 + 1$ ....

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ....

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.

► Réponses et corrigés page 69

Fiche de calcul n° 4

004A

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.
Dès le début de 1ère année.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x) + 4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Calcul 4.8

Simplifier $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. ....

▶ Réponses et corrigés page 71

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.
Dès le début de 1ère année.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 5.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 5.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 5.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 5.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ ....

b) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ....

c) $(x+a)(x+b) = (m+a)(m+b)$ ....

d) $(b-c)x^2 + (c-a)mx + (a-b)m^2 = 0$ ....

e) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{b}{x} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{b}{m}$ ....

f) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ ....

Recherche d'équations

Calcul 5.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ ....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ ....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ ....

Calcul 5.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ ....

b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ ....

c) $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 5.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 5.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

► Réponses et corrigés page 73

Exponentielle et Logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.
Dès le début de la 1ère année.

Logarithmes

Calcul 6.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0,125$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 6.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\dfrac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ ....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\dfrac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 6.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ ....

Calcul 6.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$..........

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 6.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln 2}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

d) $e^{-2\ln 3}$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 6.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln\frac{1}{2}}$

b) $e^{-\ln\ln 2}$

c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 6.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

Calcul 6.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Calcul 6.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2e^x - 1)$ ....

b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 6.10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $e^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant e^{-x^2+x}$ ....

c) $e^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $e^{-6x} \leqslant \sqrt{e}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ ....

► Réponses et corrigés page 75

Fiche de calcul n° 7 007A

Trigonométrie

Prérequis
Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.
Dès le début de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.1

Donner les valeurs :

a) $\cos\frac{3\pi}{4}$ ....

b) $\sin\frac{\pi}{6}$ ....

c) $\tan\frac{\pi}{4}$ ....

d) $\tan\frac{5\pi}{4}$ ....

e) $\cos 7\pi$ ....

f) $\sin 3\pi$ ....

g) $\cos\frac{\pi}{6}$ ....

h) $\sin\frac{7\pi}{6}$ ....

Calcul 7.2

Simplifier :

a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}$ ....

c) $\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{3\pi}{4} + \tan\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\frac{4\pi}{3} + \sin^2\frac{4\pi}{3}$ ....

Signe du cosinus et du sinus

Calcul 7.3

Donner le signe :

a) $\cos\frac{2\pi}{5}$ ....

b) $\sin\frac{7\pi}{5}$ ....

c) $\cos\frac{8\pi}{5}$ ....

d) $\tan\frac{13\pi}{5}$ ....

e) $\sin\frac{14\pi}{5}$ ....

f) $\tan -\frac{3\pi}{5}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.4

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 7.5

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ ......

d) $\tan x = -1$ ....

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ....

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ......

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ......

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

Inéquations trigonométriques

Calcul 7.6

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$ ....

c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ ....

d) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$ ....

e) $\tan x \geqslant 1$ ....

f) $|\tan x| \geqslant 1$ ....

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

► Réponses et corrigés page 77

Fiche de calcul n° 8

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.
Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Application des formules usuelles

Calcul 8.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 8.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 8.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 8.4 — Avec des fonctions composées — *bis.*

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 8.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 8.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 8.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$. ....

► Réponses et corrigés page 80

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.
Dès le début de 1ère année.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 9.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

e) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

f) e^{2t+1} ....

Utilisation des formulaires

Calcul 9.2 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 9.3 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$ ....

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 9.4 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ ....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin t}$ ....

c) $\tan t$ ....

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ....

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ....

f) $\tan^2 t$ ....

g) $\tan^3 t$ ....

h) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ....

i) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ...

j) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ ....

k) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ....

l) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ....

m) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 9.5

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ....

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ....

f) e^{3t-2} ....

g) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

h) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ ....

i) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ ....

j) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

k) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ....

l) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

m) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

n) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ....

o) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ....

p) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ ....

► Réponses et corrigés page 83

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.
Dès le début de 1ère année, et après le cours de 1ère année.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

Calcul 10.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$ $\boxed{}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$ ... $\boxed{}$

Calcul 10.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ ..... $\boxed{}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ ...... $\boxed{}$

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1 - 2x \,\mathrm{d}x$ .. $\boxed{}$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ ...... $\boxed{}$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 10.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ .... $\boxed{}$

Calcul 10.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ ... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ ... $\boxed{}$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ .... $\boxed{}$

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ... $\boxed{}$

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ...... $\boxed{}$

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ .... $\boxed{}$

Calcul 10.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3}-x\Big) \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 10.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 10.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x| \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 10.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

► Réponses et corrigés page 85

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.
A la suite du cours de 1ère année.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 11.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 11.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\cos(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 11.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 11.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^2\sin(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

▶ Réponses et corrigés page 89

Fiche de calcul n° 12

012A

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.
A la suite du cours de 1ère année.

Changements de variable

Calcul 12.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 12.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ....

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 12.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u=\sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u=\sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 12.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}$ avec $u=\tan x$ ....

b) $x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ avec $u=\sqrt{e^x-1}$ ....

c) $x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ avec $u=\sqrt[3]{x}$ ....

d) $x>1\longmapsto\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u=\sqrt{x^2-1}$ ....

► Réponses et corrigés page 92

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.
A la suite du cours de 1ère année.

Premier cas

Calcul 13.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Deuxième cas

Dans ce deuxième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 13.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Troisième cas

Calcul 13.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.6

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.7

Soit $a \in \left]0, 1\right[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Quatrième cas

Calcul 13.8

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) En effectuant le changement de variables $t = au$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}$, déterminer une primitive de

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ ....

Calcul 13.9

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.10

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 13.11 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 13.12

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1 + t + t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 - t + t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.13

Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2 + 2t + \frac{4}{9}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2 - (2a+1)t + a^2 + a}\,\mathrm{d}t$ ....

► Réponses et corrigés page 95

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.
A la suite du cours de 1ère année.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 14.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y \;=\; 1 \\ 3\,x + 4\,y \;=\; 13 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y \;=\; 16 \\ x - y \;=\; 5 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 14.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 14.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

► Réponses et corrigés page 101

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.
A la suite du cours de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 15.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ ....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ ....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ ....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ ....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 15.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ ....

d) $-2\mathrm{i}$ ....

e) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5\mathrm{i}$ ....

g) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 15.3 — Une simplification.

On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

► Réponses et corrigés page 103

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.
A la suite du cours de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 16.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 16.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 16.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Délinéarisation

Calcul 16.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisation

Calcul 16.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 16.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ ....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ ....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

► Réponses et corrigés page 105

Fiche de calcul n° 17 **0017A**

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).
A la suite du cours de 1ère année.

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Non par coeur)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 17.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 17.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 17.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Changements d’indice

Calcul 17.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d’indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k \quad \text{avec } j=n+1-k.$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k} \quad \text{avec } j=n+1-k.$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k \quad \text{avec } j=k-1.$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 \quad \text{avec } j=k-2.$ ....

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 17.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3-k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k!$ ....

Calcul 17.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Calcul 17.7

Calculer les sommes suivantes, en cherchant à faire apparaître une somme télescopique.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 17.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 17.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

► Réponses et corrigés page 108

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.
Dès le début de 1ère année, et à la suite du cours de 1ère année.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 18.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 18.2 — Pour s'échauffer – bis.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ....

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 18.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 18.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 18.5 — Le binôme de Newton.

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 18.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 18.7

Avec 2 méthodes : (1) En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer...

(2) En utilisant $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, $k^2 = k(k-1)+1$, calculer...

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 18.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

► Réponses et corrigés page 113

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.
Après le cours de 1ère année.

Calculs de valeurs

Calcul 19.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 19.2 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 19.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$: plus difficile..

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 19.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ......

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ......

Dérivation

Calcul 19.5 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$ .....

Calcul 19.6 — Dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

b) $x \mapsto F(x^x)$ ....

c) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

► Réponses et corrigés page 117

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.
A la suite du cours de 1ère année.

Calcul de termes

Calcul 20.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 20.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) u_2 ....

b) u_3 ....

Calcul 20.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 20.4 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 20.5 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 20.6 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 20.7 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 20.8

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 20.9

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 20.10 — Suite de Fermat.

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

► Réponses et corrigés page 120

034A

Inégalités

Prérequis
Manipulations d'inégalités.
Dès le début de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 21.1

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b tq : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$

a) $-4 < a + b < -1$ ....

b) $6 < a - b < 5$ ....

c) $-19 < 3b - 2a < -11$ ....

d) $-5 < ab < -6$ ....

e) $\dfrac{-2}{3} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{-1}{5}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$ ....

g) $a^2 \leqslant a$ ....

h) $(-5)^n < b^n < (-3)^n$, $(n \in \mathbb{N})$ .....

Calcul 21.2

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b

a) $-ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \leqslant ab$ ....

c) $|a| \leqslant 1 + a^2$ ....

Calcul 21.3

Vrai-Faux : Soit x un réel

a) $\sin x \leqslant (\sin x)^2$ ....

b) $(\sin x)^2 \leqslant \sin x$ ....

c) $(\sin x)^2 \leqslant |\sin x|$ ....

d) $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin x|$ ....

Pour comparer des intégrales

Calcul 21.4

Vrai-Faux : Soit un réel x, $1 \leqslant x \leqslant 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{1+x} dx$

a) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln 2)^n}{3}$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x} \leqslant (\ln 2)^n$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{1+x}$ ....

d) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x}$ ....

e) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

f) La suite $(u_n)_n$ est croissante. ......

g) La suite $(u_n)_n$ est décroissante. ...

h) La suite $(u_n)_n$ est bornée. ....

i) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. ....

Calcul 21.5

Vrai-Faux : Soit un réel x, $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$,et pour tout $n \in \mathbb{N}$on note $u_n = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(\ln x)^n}{1+x} dx$

a) $(\ln(1/2))^n \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x}$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{1+x}$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{1+x}$ ....

d) La suite $(u_n)_n$ est monotone. ......

e) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. ....

Pour comparer des sommes

Calcul 21.6

Vrai-Faux : Pour tout entier $n \geqslant 1$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

a) $0 \leqslant T_n \leqslant n$ ....

b) $\dfrac{1}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$ ....

c) $T_{n+1} \leqslant T_n$ ....

d) $T_n \leqslant T_{n+1}$ ....

e) La suite $(T_n)_n$ converge. ....

Calcul 21.7

Vrai-Faux

Soit $n \geqslant 1$, on définit $u_n = -2\sqrt{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

a) $u_{n+1} \leqslant u_n$ ....

b) $u_n \leqslant u_{n+1}$ ....

c) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

d) La suite $(u_n)_n$ est bornée. ....

► Réponses et corrigés page 122

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles.
A la suite du cours de 1ère année.

Développements limités

Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 3 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 2 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 4 : $\sin(x)(\cos(x) - 1)$ ....

d) À l'ordre 4 : $\mathrm{e}^x \sin(x)$ ....

Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 4, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Equivalents

Calcul 22.3

Déterminer un équivalent au voisinage indiqué, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) En 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) En $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) En $+\infty$: $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ ....

d) En $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^{x^2}$ .... $\boxed{}$

► Réponses et corrigés page 124

Fiche de calcul n° 23

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.
A la suite du cours de 1ère année.

Calcul matriciel

Calcul 23.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 23.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & (1) & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n\times n$ (où $n\in\mathbb{N}^*$), et où $\theta\in\mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k\in\mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 23.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij}=\binom{i-1}{j-1},\qquad b_{ij}=2^i3^{j-i}$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A\times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top\times B$ ....

d) $[A^2]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 23.4 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

b) B ...

c) C ...

d) D ...

e) E ...

f) F ...

g) G ...

h) H ..

i) J ...

Calcul 23.5 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible ..

b) Inverse de A ...

c) CNS pour B inversible ..

d) Inverse de B ...

► Réponses et corrigés page 126

0027A

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles.
A la suite du cours de 1ère année.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 24.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y \quad \text{et} \quad y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1 \quad \text{et} \quad y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12 \quad \text{et} \quad y(0) = 3$ ....

Calcul 24.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y \quad \text{et} \quad y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2 \quad \text{et} \quad y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6 \quad \text{et} \quad y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e} \quad \text{et} \quad y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 24.3 — Une équation avec conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3\mathrm{i}$ ....

Calcul 24.4 — Racines doubles, Racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 24.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = \mathrm{i}$ et $y'(0) = -\mathrm{i}$ ....

► Réponses et corrigés page 130

Fiche de calcul n° 25

Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)
A la suite du cours de 1ère année.

Les fondamentaux

Calcul 25.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x,y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

b) $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ ....

c) $(x,y) \longmapsto \sqrt{16-x^2-y^2}\ln\left(x^2+y^2-16\right)$ ....

Calcul 25.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto (x^2y, x^2 - y^2)$ ....

d) $f : (x,y) \longmapsto \arctan(2x + y)$ ....

Calcul 25.3

Même exercice.

a) $f : (x,y) \longmapsto \cos(x - y)$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto x\cos(\mathrm{e}^{xy})$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 25.4

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 25.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c} \right)$ .....

b) $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Calcul 25.6 — Points critiques.

Déterminer les points critiques de la fonction f.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ ....

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ....

c) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ....

d) $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ ....

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ....

► Réponses et corrigés page 133

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes)
A la suite du cours de 2ième année.

Séries géométriques, exponentielles

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 26.1 — Séries géométriques.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 26.2 — Séries exponentielles.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 26.3

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$.

On pourra chercher a et b tels que pour tout k, $\dfrac{1}{k^2+k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$.

On pourra chercher a, b et c tels que pour tout k, $\dfrac{1}{k^3+3k^2+2k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

Séries géométriques - Séries géométriques dérivées

Calcul 26.4 — Séries géométriques dérivées.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 26.5 — Séries géométriques dérivées – bis.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^{k}}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ....

► Réponses et corrigés page 135

Fiche de calcul n° 27

0026A

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.
A la suite du cours de 1ère année.

Vecteurs

Calcul 27.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

Calculs de rangs

Calcul 27.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 27.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et Applications linéaires

Calcul 27.4 — **Matrices d'endomorphismes.**

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

Calcul 27.5 — **Matrices d'applications linéaires.**

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

► Réponses et corrigés page 137

0033A

Réduction

Prérequis
Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation
A la suite du cours de 2ième année.

Valeurs propres

Calcul 28.1

Déterminer les valeurs propres de la matrice et préciser si la matrice est diagonalisable.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ ....

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 28.2

Même question

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. ....

c) $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

► Réponses et corrigés page 140

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2 \times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A > B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40} = \dfrac{8 \times 4}{8 \times 5} = \dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \dfrac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{6-4}{12} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0{,}2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{15} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) = \frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$= 3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5 = 105+70+42+30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$= \left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8} = \frac{145}{15}\times\frac{7}{8} = \frac{29}{3}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3} = \frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3} = \frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979} = \frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$= \frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$= 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5} = \frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$= \frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5}-\frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2} = 2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1} = \frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a+1$ et $2\,469 = 2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235} = \dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$

1.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a-1$, $1\,001 = a+1$, $1\,002 = a+2$ et $4\,002 = 2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001} = \dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}&=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\&=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\,\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\,215\times208\,341=66\,317\times104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12 On re-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times10^6+1$.

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times\,(10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ...... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $$\frac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}}=\frac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}}=\frac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}}=\frac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7}=2^{3-7}\cdot 3^{2-3}=2^{-4}\cdot 3^{-1}.$$

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22}=2^{21}+2^{21}\cdot 2=2^{21}\cdot(1+2)=2^{21}\cdot 3$.

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}=\dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}}=\dfrac{4}{2}=2$.

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n=a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}}=\dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}}=2^{38}\cdot 3^{26}$.

2.4 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}}=\dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}}=\dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}}=2^{45-42}=2^3=8$.

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4}=\dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4}=\dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}}=11$.

2.4 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}}=\dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}}=\dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4}=3^{10}$.

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6}=\dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6}=\dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5}=2^6\cdot 5$.

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4}=\dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{x-2+x}{x(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}$

Fiche n^o 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3-6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5-x^3+x^2-1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5-x^3-x^2+1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4+x^2+1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28+21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2-x+x^3-x^4-x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1-3x-3x^2+x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1+x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1+2x+3x^2+2x^3+x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x+7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x+4)(-5x+1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x-4)(10x+3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x+1)(x+16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x-1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x+2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x+1)(x+2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x+\frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x+\frac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x+y-z)(x+y+z)}$

3.5 b) .... $\boxed{(14x+3y)(-12x+3y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x+1)(y+1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x-1)(y-1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x+y)(x+1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{(a^2+b^2)(y-4x^2)(y+4x^2)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8(x^2+1)(x-4)(x+4)}$

3.6 c) .... $\boxed{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

3.6 d) .... $\boxed{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

3.6 e) .... $\boxed{(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$. Pour être “efficace”, il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p)=abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times1+3\times1+(-1)\times1=-1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1)=x^2-1$ et $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)=[(x+1)(x-1)]\left[(x+1)\left(x^2-x+1\right)\right]=\left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right)=x^5-x^3+x^2-1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\dots$

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

....

3.6 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \left(x^2+1\right)-x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 .... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha-\beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6-3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6 = 0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Équations du second degré

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

5.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

5.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

5.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

5.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

5.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

5.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

5.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

5.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

5.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

5.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

5.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

5.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

5.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

5.2 e) .... $\boxed{a, b}$

5.2 f) .... $\boxed{a - b, a + b}$

5.3 a) .... $\boxed{2/3}$

5.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

5.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

5.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

5.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

5.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

5.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

5.4 d) .... $\boxed{m \text{ donc } m(a-b)/(b-c)}$

5.4 e) .... $\boxed{m \text{ donc } ab/m}$

5.4 f) .... $\boxed{a + b \text{ puis } 2ab/(a+b).}$

5.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

5.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

5.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

5.5 d) .... $\boxed{x^2 - 2mx + 3 = 0}$

5.5 e) .... $\boxed{2x^2 - (4m+1)x + (2m^2 + m - 15) = 0}$

5.5 f) .... $\boxed{m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0}$

5.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

5.6 b) .... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

5.6 c) .... $\boxed{m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1}$

5.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

5.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

5.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

5.7 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

5.7 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

5.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

5.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

5.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

5.8 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

5.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

5.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

5.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

5.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

5.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

5.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

5.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'éqation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

5.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a + b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

5.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

5.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 3(4m - 1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

5.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

5.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m + 1)^2 - (m + 3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

5.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

5.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

5.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

5.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 6. Exponentielle et Logarithme

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

6.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

6.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

6.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

6.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

6.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$

6.2 a) .... $\boxed{-\ln 3 - 2\ln 2}$

6.2 b) .... $\boxed{2\ln 3 - 2\ln 2}$

6.2 c) .... $\boxed{\ln 3 + 11\ln 2}$

6.2 d) .... $\boxed{3\ln 5 + 2\ln 2}$

6.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5 + 4\ln 2}$

6.2 f) .... $\boxed{2\ln 5 - 2\ln 2}$

6.3 .... $\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$

6.4 a) .... $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

6.4 b) .... $\boxed{17 + 12\sqrt{2}}$

6.4 c) .... $\boxed{0}$

6.4 d) .... $\boxed{0}$

6.5 a) .... $\boxed{8}$

6.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

6.5 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

6.5 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

6.5 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

6.5 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

6.6 a) .... $\boxed{-2}$

6.6 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

6.6 c) .... $\boxed{-17}$

6.6 d) .... $\boxed{1}$

6.6 e) .... $\boxed{-1}$

6.6 f) .... $\boxed{e}$

6.7 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

6.7 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

6.7 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

6.7 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

6.8 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

6.8 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

6.8 c) .... $\boxed{1}$

6.8 d) .... $\boxed{\text{-1}}$

6.9 a) .... $\boxed{x + \ln 2}$

6.9 b) .... $\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$

6.9 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

6.9 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

6.9 e) .... $\boxed{e^{x\ln(1+x)}}$

6.10 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}}$

6.10 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

6.10 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

6.10 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

6.10 e) .... $\boxed{\varnothing}$

6.10 f) .... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

6.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

....

6.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

....

6.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

....

6.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3\times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

....

6.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

6.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4 \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

6.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

6.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

6.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

6.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

6.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

6.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in\,]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin\,]-\infty, -7[$.

Fiche n° 7. Trigonométrie

Réponses

7.1 a) $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

7.1 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

7.1 c) $\boxed{1}$

7.1 d) $\boxed{1}$

7.1 e) $\boxed{-1}$

7.1 f) $\boxed{0}$

7.1 g) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

7.1 h) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

7.2 a) $\boxed{0}$

7.2 b) $\boxed{0}$

7.2 c) $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

7.2 d) $\boxed{1}$

7.3 a) $\boxed{>0}$

7.3 b) $\boxed{<0}$

7.3 c) $\boxed{<0}$

7.3 d) $\boxed{<0}$

7.3 e) $\boxed{>0}$

7.3 f) $\boxed{>0}$

7.4 a) $\boxed{0}$

7.4 b) $\boxed{-\sin x}$

7.4 c) $\boxed{2\cos x}$

7.4 d) $\boxed{-2\cos x}$

7.5 a) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

7.5 a) $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

7.5 a) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 b) $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

7.5 b) $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

7.5 b) $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 c) $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

7.5 c) $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

7.5 c) $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 d) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$

7.5 d) $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right\}}$

7.5 d) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 e) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

7.5 e) $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

7.5 e) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 f) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

7.5 f) $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

7.5 f) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 g) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

7.5 g) $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

7.5 g) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 h) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

7.5 h) $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

7.5 h) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

7.5 i) .... $\left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}$

7.5 i) .... $\left\{-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right\}$

7.5 i) ...... $\left\{\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

7.5 j) .... $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$

7.5 j) .... $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$

7.5 j) ...... $\left\{\frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

7.6 a) .... $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

7.6 a) .... $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7.6 b) .... $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

7.6 b) .... $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

7.6 c) .... $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

7.6 c) .... $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

7.6 d) .... $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

7.6 d) .... $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

7.6 e) .... $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

7.6 e) .... $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

7.6 f) ..... $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

7.6 f) .... $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7.6 g) .... $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

7.6 g) .... $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7.6 h) .... $\left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$

7.6 h) .... $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$

Corrigés

7.5 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

7.5 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$.

7.5 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

7.5 j) On a $\cos\frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\frac{5\pi}{14}$.

7.6 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}$.

7.6 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

7.6 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

7.6 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 8. Dérivation

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{6x^2 + 2x - 11}$

8.1 b) .... $\boxed{5x^4 - 6x^2 + 4x - 15}$

8.1 c) .... $\boxed{(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)}$

8.1 d) .... $\boxed{(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2 - x}{x-2}}$

8.2 a) .... $\boxed{5(x^2 - 5x)^4(2x-5)}$

8.2 b) .... $\boxed{4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)}$

8.2 c) .... $\boxed{8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4}$

8.2 d) .... $\boxed{-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

8.3 c) .... $\boxed{(-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x)}$

8.3 d) .... $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

8.4 a) .... $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)}$

8.4 c) .... $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

8.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

8.5 c) .... $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

8.5 d) .... $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

8.6 a) .... $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

8.6 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

8.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

8.6 d) .... $\boxed{\dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}}$

8.7 a) .... $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

8.7 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

8.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

8.7 d) .... $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

8.7 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

8.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2+3x+2)\times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

8.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5) + (x^3+3x+2)\times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

8.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x) + (x^2-2x+6)\times 2\exp(2x) = (2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

8.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2) + (3x^2-x)\times\dfrac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

8.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

8.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

8.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4. \end{aligned}$$

8.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$. En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x)-78\cos^3(x)-9\sin(x)+51\cos(x)$.

8.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

8.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

8.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x)+(2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x) \\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x). \end{aligned}$$

8.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

8.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\times\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3+4x-4x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big). \end{aligned}$$

8.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big). \end{aligned}$$

8.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

8.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

8.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

8.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

8.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

8.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

8.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

8.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

8.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2\times\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

8.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

8.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

8.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4-4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

8.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

8.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 9. Primitives

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

9.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

9.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

9.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

9.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

9.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

9.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

9.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

9.2 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

9.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

9.2 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

9.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

9.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

9.3 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

9.3 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

9.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

9.3 e) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|}$

9.3 f) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

9.4 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

9.4 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\sin t}}$

9.4 c) .... $\boxed{-\ln|\cos t|}$

9.4 d) .... $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

9.4 e) .... $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

9.4 f) .... $\boxed{\tan t - t}$

9.4 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|}$

9.4 h) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

9.4 i) .... $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

9.4 j) .... $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

9.4 k) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

9.4 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

9.4 m) .... $\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)}$

9.5 a) .... $\boxed{2(t-1) \text{ puis } \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t}$

9.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\dfrac{1}{t} + \ln|t|}$

9.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3}{t^4} \text{ puis } \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2t^2}}$

9.5 d) .... $\boxed{-\dfrac{4}{t^5} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

9.5 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} \text{ puis } \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}}$

9.5 f) .... $\boxed{3\mathrm{e}^{3t-2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}}$

9.5 g) .... $\boxed{\cos t(3\cos^2 t - 2) \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

9.5 h) .... $\boxed{-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos\dfrac{1}{t}}$

9.5 i) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2} \text{ puis } \ln(2+\mathrm{e}^t)}$

9.5 j) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{2t})}{(2+\mathrm{e}^t)^2} \text{ puis } \arctan(\mathrm{e}^t)}$

9.5 k) .... $\boxed{\dfrac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

9.5 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2}}$

9.5 m) .... $\boxed{(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}}$

9.5 n) .... $\boxed{\dfrac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \dfrac{1}{2}\ln^2 t}$

9.5 o) .... $\boxed{-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t} \text{ puis } \ln|\ln t|}$

9.5 p) .... $\boxed{\dfrac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t))}$

Corrigés

9.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

9.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

9.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

9.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

9.1 e) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

9.1 f) Admet des primitves sur $\mathbb{R}$.

9.4 f) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \text{cte}$

9.4 g) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \text{cte}$

Fiche n° 10. Calcul d'intégrales

Réponses

10.1 a) .... Positif

10.1 b) .... Négatif

10.1 c) .... Positif

10.2 a) .... $\boxed{14}$

10.2 b) .... $\boxed{50}$

10.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

10.2 d) .... $\boxed{-54}$

10.2 e) .... $\boxed{0}$

10.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

10.3 a) .... $\boxed{8}$

10.3 b) .... $\boxed{-2}$

10.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

10.3 d) .... $\boxed{0}$

10.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

10.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

10.4 a) .... $\boxed{0}$

10.4 b) .... $\boxed{1}$

10.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

10.4 d) .... $\boxed{18}$

10.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

10.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

10.5 a) .... $\boxed{78}$

10.5 b) ..... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

10.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

10.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

10.5 e) .... $\boxed{6}$

10.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

10.6 a) .... $\boxed{0}$

10.6 b) .... $\boxed{0}$

10.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

10.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

10.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)}$

10.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

10.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e + 1}}$

10.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

10.7 c) .... $\boxed{e^2}$

10.7 d) .... $\boxed{3e - 4}$

10.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

10.7 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

10.8 a) .... $\boxed{0}$

10.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

10.8 c) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

10.8 d) .... $\boxed{\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}}$

10.8 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

10.8 f) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

10.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

10.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

10.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$ est donc négative.

10.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

10.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5 \,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5 \,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5 \,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

10.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7; 0)$ et $B(7; 21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

10.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD+BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3+15)$.

10.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

10.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

10.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

10.3 b) $\int_{1}^{3} 2x - 5 \, \mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_{1}^{3} = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2$.

10.3 c) $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{-2}^{0} = 0 - \Big(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\Big) = \frac{8}{3}$.

10.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.3 e) $\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$.

10.3 f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{101}x^{101}\Big]_{1}^{-1} = -\frac{2}{101}$.

10.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.4 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1$.

10.4 c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{1}^{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

10.4 d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{100} = 18$.

10.4 e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}$.

10.4 f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3$.

10.5 a) $\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$.

10.5 b) $\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \, \mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1)$.

10.5 c) $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \Big[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{\pi}\ln\Big(\frac{\pi+2}{2}\Big)$.

10.5 d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

10.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

10.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

10.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

10.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

10.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

10.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

10.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \frac{1}{2}.$

10.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

10.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

10.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e} - 4.$

10.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

10.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et positif sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

10.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

10.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

10.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

10.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

10.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche n° 11. Intégration par parties

Réponses

11.1 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{2} - 1}$

11.1 b) $\boxed{-\dfrac{5}{2}\cos(2) - \dfrac{1}{2}\sin(2) + \dfrac{3}{2}}$

11.1 c) $\boxed{4}$

11.1 d) $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

11.1 e) $\boxed{1}$

11.1 f) $\boxed{2\ln 2 - \dfrac{3}{4}}$

11.1 g) $\boxed{\ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}}$

11.1 h) $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}}$

11.1 i) $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3}}$

11.1 j) $\boxed{\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{16\sqrt{2}}{15}}$

11.1 k) $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}}$

11.1 l) $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}}$

11.2 a) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}}$

11.2 b) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}}$

11.2 c) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}}$

11.2 d) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) \end{cases}}$

11.3 a) $\boxed{\dfrac{5}{2} - \mathrm{e}^2}$

11.3 b) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$

11.4 a) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2 \end{cases}}$

11.4 b) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

11.4 c) $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}}$

Corrigés

11.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$

11.1 b) On choisit $u'(t) = \sin(2t)$ et $v(t) = 2t + 3$.

$$\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(2t+3)\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}\cos(2) + \frac{3}{2} + \frac{\sin(2)}{2}$$

11.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 - 2\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 4e - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 = 4$$

11.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$.

$$\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2}{(\ln(2))^2}$$

11.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$

11.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$.

$$\int_1^2 t\ln t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t \, \mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

11.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$.

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\, \mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

11.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

11.1 i) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$$

11.1 j) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}\left[(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

11.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t =$ $\displaystyle\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}.$

11.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1+\tan^2 t\right) \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \, \mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) =$ $1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, \mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$

11.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

11.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

11.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\, \mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

11.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{cos}t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{cos}(t)\, \mathrm{d}t = [t\mathrm{sin}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sin}(t)\, \mathrm{d}t = x\mathrm{sin}(x) + \cos(x) - 1$. D'où une primitive.

11.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi

$\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t)=2t+3$ et $u'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2-\left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4}-\frac{5}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2}-\mathrm{e}^2$.

....

11.3 b) On choisit d'abord $u'=\exp$ et $v=\sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$. Ensuite $u'=\exp$ et $v=\cos$, d'où : $\displaystyle\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1$.

....

11.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x x^2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u'(t)=\sin(t)$ et $v(t)=t^2$ cela donne $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u'(t)=\cos(t)$ et $v(t)=2t$, ce qui donne $\displaystyle -x^2\cos(x)+[2t\sin(t)]_0^x - \int_0^x 2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)-2$.

....

11.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x>0$, en choisissant $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$, on obtient $\displaystyle x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x\mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x\mapsto \ln^2 x$.

....

11.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x>0$, alors, avec $u'(t)=t^2$ et $v(t)=\ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2\ln t\,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t)=t^2$ et $v(t)=\ln(t)$, on obtient $\displaystyle\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3\ln t\right]_1^x + \frac{2}{9}\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3-1)$. D'où une primitive.

....

Fiche n° 12. Changements de variable

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

12.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

12.1 c) .... $\boxed{\ln(\sqrt{2}+1)}$

12.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

12.1 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

12.1 f) .... $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

12.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

12.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)}$

12.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

12.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}}$

12.2 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

12.2 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

12.3 a) .... $\boxed{2\mathrm{e}^2}$

12.3 b) .... $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{cases} \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[& \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \tan x + \ln\tan(x) \end{cases}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right) \end{cases}}$

12.4 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{cases}}$

12.4 d) .... $\boxed{\begin{cases}]1,+\infty[& \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \arctan\sqrt{x^2-1} \end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On pose $t=\sin\theta$ avec $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

....

12.1 b) On pose $u=\sqrt{t}$ avec $t\in[1,3]$, donc $t=u^2$ et $u\in\left[1,\sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=2u$ et donc $dt=2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u=2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

....

12.1 c) On pose $u=\sin t$ avec $t\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$, On a $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. On obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[-\ln(1-u)+\ln(1+u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

....

12.1 d) On pose $u=\sin t$ avec $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\cos t$ et donc $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

....

12.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

12.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

12.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

12.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

12.2 c) On pose $u = \dfrac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2,4]$, donc $t = 2u+2$ et $u \in [0,1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

12.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

12.2 e) On pose $u = \dfrac{1}{t}$ avec $t \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1u^2}}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

12.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

12.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

12.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3},2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

12.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan t$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln\tan(x) + C$.

....

12.4 b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C$.

....

12.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

....

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x t\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$$

....

Fiche n° 13. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

13.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}$

13.2 a) .... $\boxed{2\ln\dfrac{9}{10}}$

13.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

13.3 a) .... $\boxed{\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)}$

13.3 b) .... $\boxed{\ln\dfrac{33}{28}}$

13.4 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

13.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}$

13.5 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

13.5 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

13.5 c) .... $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

13.6 a) .... $\boxed{\ln\dfrac{1}{3}}$

13.6 b) .... $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

13.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}}$

13.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}}$

13.7 .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

13.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)}$

13.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

13.9 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

13.10 .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

13.11 a) .... $\boxed{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$

13.11 b) ...... $\boxed{2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}}$

13.11 c) .. $\boxed{\sqrt{2}(x+\tfrac{1}{4})^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}}$

13.11 d) ..... $\boxed{a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}}$

13.12 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

13.12 b) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

13.12 c) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

13.12 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

13.13 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

13.13 b) .... $\boxed{\ln\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)}$

Corrigés

13.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

....

13.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

....

13.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\Big(t+\tfrac{1}{2}\Big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16}-\ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

13.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2)-\ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big)-\ln(a) = \ln(a+1).$$

13.3 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7)-\ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

13.3 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{11}{12}-\ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

13.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\Big) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big) \\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

13.4 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

13.5 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t = 1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t = 1$, on trouve $A = -1$.

De même, on trouve $B = 1$.

13.5 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ = 2\Big[\ln(t-2) - \ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4 \\ = 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3} + \ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

13.6 a) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t) - \ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

13.6 b) Soit $t \in [2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1) - \ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

13.6 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3 = (t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \ln(t+1) - \ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big[\ \ln\Big(\frac{t+1}{t+3}\Big)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

....

13.6 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ \ln(\tfrac{1}{2}-t) - \ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ \ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

....

13.7 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t) + \ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

....

13.8 a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{a\,\mathrm{d}u}{a^2(u^2+1)} = \frac{1}{a}\arctan\Big(\frac{x}{a}\Big)$

....

13.9 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

....

13.9 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

....

13.10 On a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

....

13.11 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$x^2 + x + 1 = x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + 1$$
$$= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

....

13.11 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \qquad (\text{car } \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16})$$

....

13.11 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\big(x + \frac{1}{4}\big)^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

....

13.11 d) On trouve

$$ax^2 + a^2x + a^3 = a\big(x^2 + ax\big) + a^3 = a\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

....

13.12 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

....

13.12 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2 + t + 1 = \big(t + \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\big(t+\frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{en posant } \theta = t + \tfrac{1}{2})$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

....

13.12 c) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

13.12 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)$, pour $t\in\mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\tfrac{1}{2}-t\big) - \ln\big(\tfrac{1}{3}-t\big)\Big]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3)-\ln(3/2) = \ln(2).$$

13.13 a) On calcule

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t^2+\frac{2}{3}t\big)+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{12}.$$

13.13 b) Déjà, on remarque qu'on a, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, $t^2-(2a+1)t+a^2+a = (t-a)\big(t-(a+1)\big)$ et

$$\frac{1}{(t-a)\big(t-(a+1)\big)} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \Big[\ln\left(a+1-t\right) - \ln\left(a-t\right)\Big]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right)\right]_0^1$$

$$= \left(\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)\right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).$$

Fiche n° 14. Systèmes linéaires

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\{(3,1)\}}$

14.1 b) .... $\boxed{\{(7,2)\}}$

14.1 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}}$

14.1 d) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$

14.2 a) .... $\boxed{\left\{\left(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\right\}}$

14.2 b) .... $\boxed{(2,-3)}$

14.2 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2\right)\right\}}$

14.2 d) .... $\boxed{(a-2a^2,a+a^2)}$

14.3 a) .... $\boxed{\{(1+z,-z,z); z\in\mathbb{R}\}}$

14.3 b) .... $\boxed{\{(1,y,3+2y); y\in\mathbb{R}\}}$

14.3 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z\right); z\in\mathbb{R}\right\}}$

14.3 d) .... $\boxed{\left\{\left(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x\right); x\in\mathbb{R}\right\}}$

Corrigés

14.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 10y+3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ x=1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

....

14.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x \\ x-16+2x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21 \\ y=16-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=16-14=2 \end{cases}$

....

14.1 c) On calcule : $\begin{cases} 3x-6y=-3 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x=-1+2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$

....

14.1 d) On calcule :

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 6x+2y=3\sqrt{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 10y=5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3x=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

....

14.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\frac{a}{4} \\ y=1-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}a=\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a \end{cases}$

....

14.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{cases}$$

$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\frac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{cases}$$

....

14.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

14.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

14.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

14.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

14.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{cases}$$

14.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Fiche n° 15. Nombres complexes

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

15.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

15.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

15.1 d) .... $\boxed{5}$

15.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

15.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

15.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

15.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

15.2 a) .... $\boxed{12}$

15.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

15.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

15.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

15.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

15.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

15.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

15.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

15.3 a) .... $\boxed{1}$

15.3 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

15.3 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

15.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

15.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

15.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

15.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

15.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

15.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

15.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$$\frac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \frac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \frac{4}{29}-\frac{19}{29}\mathrm{i}.$$

15.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

15.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

15.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

15.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

15.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

15.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

15.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

15.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

15.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

15.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

15.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

15.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 16. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)}$

16.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}}$

16.1 c) ... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}}$

16.1 d) ... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}}$

16.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}}$

16.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

16.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

16.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

16.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

16.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

16.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

16.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

16.2 g) .... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

16.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

16.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

16.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

16.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

16.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

16.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

16.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

16.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

16.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

16.6 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

16.6 c) .... $\boxed{0}$

Corrigés

16.1 a) On calcule :

$$\cos^3(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big)=\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big)+\frac{3}{8}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$

....

16.1 b) On calcule :

$$\cos(2x)\sin^2(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)$$
$$=-\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)+2\big)=-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.$$

....

16.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

16.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

16.2 b) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$

16.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$

16.2 d) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

16.2 e) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}.$

16.2 f) $1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}.$

16.2 g) On fait le quotient de a) et f).

16.2 h) $\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$

16.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

16.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}+i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{11\pi}{12}}.$

16.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

16.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(e^{4ix}) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

16.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{ix}+e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)}+e^{ix})\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x).$

16.5 b) $\sin(5x) - \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} 2\mathrm{i}\sin(x)\big) = 2\cos(4x)\sin(x)$.

16.5 c) $\cos(x) - \cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big) = 2\sin(x)\sin(2x)$.

16.5 d) $\sin(3x) + \sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} 2\cos(x)\big) = 2\sin(4x)\cos(x)$.

16.6 a) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$
$= \mathrm{Im}\big(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ donc $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3 = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.
On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}} \frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

16.6 b) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.
Si x est de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la somme vaut -4.
Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{7\mathrm{i}x}) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1 - (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1 - (\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) = \frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

16.6 c) On calcule :

$$\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x + \frac{2\pi}{3})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x + \frac{4\pi}{3})}\Big) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{\left(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2\right)}_{=0}\right) = 0.$$

Fiche n° 17. Sommes et produits

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

17.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

17.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

17.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

17.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

17.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

17.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

17.2 d) .... $\boxed{5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}}$

17.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

17.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

17.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

17.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

17.3 c)................ $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

17.3 d) .... $\boxed{0}$

17.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

17.4 b) .... $\boxed{0}$

17.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

17.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

17.5 a) .... $\boxed{(n+2)^3-2^3}$

17.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

17.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

17.5 d)............ $\boxed{(n+1)!-1}$

17.6 a) .... $\boxed{n+1}$

17.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

17.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

17.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

17.7 a).............. $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

17.7 b)............. $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

17.8 a)................ $\boxed{2n^2+n}$

17.8 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

17.9 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

17.9 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

17.9 c).............. $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

17.9 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

17.9 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

17.9 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

17.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

....

17.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

....

17.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k+(n-1)\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3n(n+1)}{2}+n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

....

17.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1}k \;-\; 4\sum_{k=2}^{n-1}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2}-4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

....

17.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

17.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

17.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

17.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n\frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

17.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1)+n+4.$$

17.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

17.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

17.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

17.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}\times k = 5^n\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}.$$

17.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

17.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

17.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

17.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$
$$= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n)$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

17.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

17.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

17.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

17.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

17.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

17.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$.

17.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} \times \frac{2n+1}{2n-1}$$
$$= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2.$$

17.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

17.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

17.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} \big(4p^2 + 4p + 1\big) \\
&= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

17.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

17.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

17.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

17.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{3}{2}(j^2 - j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

17.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=i}^n i^2\right) + 2\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^j ij\right) + \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^j j^2\right) = \sum_{i=1}^n\left(i^2\sum_{j=i}^n 1\right) + 2\sum_{j=1}^n\left(j\sum_{i=1}^j i\right) + \sum_{j=1}^n\left(j^2\sum_{i=1}^j 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^n i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^n j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^n j^3 = \sum_{i=1}^n\left[i^2(n+1)-i^3\right] + \sum_{j=1}^n (j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

17.9 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^n j\right)\left(\sum_{i=1}^n \ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^n i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

17.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^n i \\
&= 2\sum_{j=2}^n\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 18. Coefficients binomiaux

Réponses

18.1 a) $\boxed{10\,100}$

18.1 b) $\boxed{720}$

18.1 c) $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

18.1 d) $\boxed{15}$

18.1 e) $\boxed{56}$

18.1 f) $\boxed{140}$

18.2 a) $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

18.2 b) $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

18.2 c) $\boxed{2^n \times n!}$

18.2 d) $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

18.3 a) $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

18.3 b) $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

18.3 c) $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

18.3 d) $\boxed{(n+2)(n+1)}$

18.3 e) $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

18.3 f) $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

18.4 a) $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

18.4 b) $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

18.5 a) $\boxed{3^n}$

18.5 b) $\boxed{0}$

18.5 c) $\boxed{6^n}$

18.5 d) $\boxed{12 \times 15^n}$

18.6 a) $\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dbinom{n}{2p}}$

18.6 b) $\boxed{2^{n-1}}$

18.7 a) $\boxed{2^n}$

18.7 b) $\boxed{n2^{n-1}}$

18.7 c) $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

18.7 d) $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

18.8 a) $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

18.8 b) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^2}$

18.8 c) $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

Corrigés

18.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

18.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

18.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

18.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

18.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

18.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

18.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

18.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

18.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

....

18.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

....

18.3 a) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

....

18.3 b) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

....

18.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

....

18.3 d) On calcule $\displaystyle\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

....

18.3 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

....

18.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

....

18.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{2n \times (n+1)!} &= \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)} \\ \text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

....

18.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3}=\frac{(3n+3)!}{a^{3n+3}\times((n+1)!)^3}\times\frac{a^{3n}\times(n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(3n+3)! &= (3n+3)\times(3n+2)\times(3n+1)\times(3n)!\\ a^{3n+3} &= a^{3n}\times a^3\\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1)\times n!)^3=(n+1)^3\times(n!)^3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}\\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}=\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.\end{aligned}$$

18.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times1^{n-k}=(2+1)^n=3^n$.

18.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)\times\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=-1\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=(-1)\times(-1+1)^n=0.$$

18.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2n-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}2^n\times2^{n-k}\binom{n}{k}=2^n\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\times1^k=2^n\times(1+2)^n=2^n\times3^n=6^n$.

18.5 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{k+2}\binom{n}{k}\times3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n}2^2\times2^k\times\binom{n}{k}\times3^{n+1}\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times(2+3)^n=4\times3^{n+1}\times5^n=4\times3\times3^n\times5^n=12\times15^n.\end{aligned}$$

18.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k)$.

Or, $1+(-1)^k=2$ si k est pair et $1+(-1)^k=0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P=\{k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a

$$(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k\in P}\binom{n}{k}\times2=2\times\sum_{k\in P}\binom{n}{k}.$$

Or, si $k\in P$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=2p$. Comme $0\leqslant k\leqslant n$, on a alors $0\leqslant 2p\leqslant n$ et donc $0\leqslant p\leqslant\dfrac{n}{2}$.

Comme $p\in\mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0\leqslant p\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

Ainsi,

$$\sum_{k\in P}\binom{n}{k}=\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}\quad\text{et}\quad(1+1)^n+(1-1)^n=2\times\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}.$$

18.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}=\frac{1}{2}((1+1)^n+(1-1)^n)=2^{n-1}$.

18.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

....

18.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

....

18.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

....

18.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

....

18.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

....

18.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k}x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n. Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

....

18.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

....

Fiche n° 19. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

19.1 b) .... $\boxed{2}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

19.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

19.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

19.1 f) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

19.2 b) .... $\boxed{1}$

19.2 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

19.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

19.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

19.3 b) .... $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

19.3 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

19.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

19.4 a) .... $\boxed{1}$

19.4 b) .... $\boxed{0}$

19.4 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

19.4 d) . $\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

19.4 e) $\boxed{\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

19.4 f) .... $\boxed{1}$

19.5 a) ... $\boxed{x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x}$

19.5 b). . $\boxed{x\mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

19.5 c)...... $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

19.5 d) .... $\boxed{x\mapsto \dfrac{1-2x\arctan(x)}{(x^2+1)^2}.}$

19.6 a) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

19.6 b). . $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}}$

19.6 c) .... $\boxed{x\mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

19.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2.$

19.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

19.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

19.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}.$

19.2 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x=\dfrac{9^x}{2}\Leftrightarrow \ln(3^x)=\ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right)\Leftrightarrow x\ln(3)=2x\ln(3)-\ln(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}.$

19.2 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x=2\times 2^x\Leftrightarrow 2x\ln(2)=(x+1)\ln(2)\Leftrightarrow 2x=x+1\Leftrightarrow x=1.$

19.2 c) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x=3.4^x\Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(3)+2x\ln(2)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}.$

19.2 d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$10^{2x}=4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow \ln(10^{2x})=\ln(4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}})\Leftrightarrow 2x\ln(10)=\ln(4)+x\ln(5)+\frac{x}{2}\ln(9)$$
$$\Leftrightarrow x\left(2\ln(5)+2\ln(2)-\ln(5)-\frac{2\ln(3)}{2}\right)=\ln(4)\Leftrightarrow x=\frac{\ln(4)}{2\ln(2)+\ln(5)-\ln(3)}=\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.$$

19.3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

19.3 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

19.3 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow$ $3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

19.3 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

19.4 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

19.4 b) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

19.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

19.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

19.4 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

19.4 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

19.5 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

19.5 c) On écrit que $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$.

19.5 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\frac{x^2+1}{x^2+1} - 2x\arctan(x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - 2x\arctan(x)}{(x^2+1)^2}$

19.6 a) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

19.6 b) Il s'agit de dériver une composée.

La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x F'(x^x) = (\ln(x)+1)x^x \mathrm{e}^{-(x^x)^2} = (\ln(x)+1)x^x \mathrm{e}^{-x^{2x}}$.

Fiche n° 20. Suites numériques

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

20.1 b) .... $\boxed{8}$

20.1 c) .... $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

20.1 d) ...... $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

20.2 a) .... $\boxed{13}$

20.2 b) .... $\boxed{29}$

20.3 a) .... $\boxed{2}$

20.3 b) .... $\boxed{2}$

20.4 a) .... $\boxed{21}$

20.4 b) .... $\boxed{10\ 000}$

20.4 c) .... $\boxed{2\ 001}$

20.4 d) .... $\boxed{10\ 201}$

20.5 a) .... $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

20.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

20.6 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

20.6 b) .... $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

20.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

20.6 d) .... $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

20.7 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

20.7 b) .... $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

20.8 a) .... $\boxed{3^n + (-2)^n}$

20.8 b) .... $\boxed{211}$

20.9 a) ... $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}}$

20.9 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

20.10 a) .... $\boxed{257}$

20.10 b) .... $\boxed{65\ 537}$

20.10 c) .... $\boxed{F_n}$

20.10 d) .... $\boxed{F_{n+1} - 2}$

20.10 e) .... $\boxed{F_{n+1} + 2^{2^n+1}}$

20.10 f) .... $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

20.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5} \times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

20.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5} \times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5} \times 8 = 8$.

20.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5} \times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

20.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5} \times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

20.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

20.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

20.3 a) $w_1 = \dfrac{1}{2} \times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

20.3 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

20.4 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201$.

20.4 b) $s_{100} = \dfrac{100\times(1+199)}{2} = \dfrac{100\times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

20.4 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001$.

20.4 d) $s_{101} = \dfrac{101\times(1+201)}{2} = \dfrac{101\times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

20.5 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}.$

20.5 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}.$

20.6 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}.$

20.6 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\,023}{512} = \dfrac{3069}{512}.$

20.6 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\,024}.$

20.6 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\,047}{1\,024} = \dfrac{6141}{1024}.$

20.7 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}.$

20.7 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}.$

20.8 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

20.8 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

20.9 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

20.9 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

20.10 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257.$

20.10 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537.$

20.10 c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^{n-1} \times 2} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n.$

20.10 d) $F_n \times (F_n - 2) = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) = F_{n+1} - 2.$

20.10 e) $F_n^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 + 2^{2^n+1} = F_{n+1} + 2^{2^n+1}.$

20.10 f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2 = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2(F_{n+1} - 1) = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2 \cdot 2^{2^{n+1}} = F_{n+2}.$

Fiche n° 21. Inégalités

Réponses

21.1 a)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.4** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.1 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.4** f)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.1 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.4** g)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.1 d)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.4** h)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.1 e)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.4** i)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.1 f)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.5** a)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.1 g)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.5** b)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.1 h)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.5** c)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.2 a)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.5** d)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.2 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.5** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.2 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.6** a)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.3 a)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.6** b)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.3 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.6** c)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.3 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.6** d)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.3 d)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.6** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.4 a)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.7** a)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.4 b)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.7** b)	$\boxed{\text{Faux}}$
21.4 c)	$\boxed{\text{Faux}}$	**21.7** c)	$\boxed{\text{Vrai}}$
21.4 d)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**21.7** d)	$\boxed{\text{Vrai}}$

Corrigés

21.2 a) Reconnaître une identité rémarquable.

21.2 b) Reconnaître une identité rémarquable.

21.2 c) Distinguer les deux cas : $|a| \leqslant 1$ et $|a| > 1$.

21.3 c) Car $|\sin x| \leqslant 1$

21.3 d) Reconnaître une formule trigonométrique : $\cos(2x) = ...$

21.4 b) Encadrer le numérateur, puis le dénominateur, et faire le produit de nombres positifs.

21.4 c) Attention, ici : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$.

21.4 g) Propriété de la croissance de l'intégrale.

21.4 h) Propriété de la croissance de l'intégrale.

21.4 i) Propriété de la croissance de l'intégrale, et théorème des gendarmes.

21.5 a) Attention, ici, $\ln(x) \leqslant 0$.

21.5 e) Encadrer en travaillant sur la valeur absolue,
puis propriétés de l'inégalité triangulaire et de la croissance de l'intégrale.

21.6 a) Chacun des n termes de la somme est compris entre 0 et 1.

21.6 b) Chacun des n termes de la somme est compris entre $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.

21.6 c) Etudier le signe de la différence.

21.6 d) Etudier le signe de la différence.

21.6 e) Suite monotone et bornée.

21.7 a) Etudier le signe de la différence, puis utiliser l'expression conjuguée.

21.7 c) Utiliser les quantités conjuguées pour les membres extérieurs de l'inégalité.

21.7 d) Exploiter l'inégalité précédente, en faisant apparaître des sommes télescopiques. Puis utiliser les quantités conjuguées.

Fiche n° 22. Développements limités

Réponses

22.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

22.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

22.1 c) .... $-\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.1 d) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

22.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

22.2 d) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

22.3 a) .... $-\dfrac{1}{2x}$

22.3 b) .... $\dfrac{1}{x^2}$

22.3 c) .... $-\ln(x)$

22.3 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x$

Corrigés

22.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

....

22.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 2. Observez que le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(1 - x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3).$$

....

22.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cos(x)-1) = \left(x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(-\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = -\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$.

....

22.1 d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x\sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

....

22.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 3) et de l'exponentielle (à l'ordre 2), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)$.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

22.2 b) On a

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \underset{u\to 1}{\mathrm{o}}(u^2)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).\end{aligned}$$

22.2 c) On a : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\left(1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^3)\right)$.

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}(1 + \left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right) + \dfrac{\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

22.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$.

Or $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\dfrac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$.

D'où $g(t) = \left(-t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \dfrac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$

et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$.

22.3 a) On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - (\mathrm{e}^x - 1)}{x^2(\mathrm{e}^x - 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

22.3 b) $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$

22.3 c) On a : $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) = -\ln(x) + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) + x\left(\dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\dfrac{1}{x})\right) \sim -\ln(x)$.

22.3 d) On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\ &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Fiche n° 23. Calcul matriciel

Réponses

23.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

23.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

23.1 c) 17 (matrice 1×1)

23.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

23.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

23.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

23.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

23.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

23.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

23.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

23.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

23.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

23.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

23.2 i) $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

23.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

23.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

23.2 l) $n^{k-1}D$

23.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

23.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

23.3 c) $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

23.3 d) $2^{i-j}\binom{i-1}{j-1}$

23.4 a) $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

23.4 b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

23.4 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

23.4 d) $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

23.4 e) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

23.4 f) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

23.4 g) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

23.4 h) Non inversible !

23.4 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

23.5 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

23.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

23.5 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

23.5 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

23.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1,2)$ est égal à k.

23.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

23.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

23.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4+5=9$, pour A^3, $8+19=27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

23.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

23.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

23.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

23.2 l) La conjecture est alors évidente.

23.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

23.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

23.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

23.3 d) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

23.4 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

23.4 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\3&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right) L_3\leftarrow L_3-3L_1$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right) L_2\leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/2&1&1/2&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1+L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{matrix}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&1&-1/2\\0&1&0&3/2&1&-1/2\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-1/2L_3\\ L_2\leftarrow L_2-1/2L_3\\ \end{matrix}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&2&-1\\-6&-2&2\end{pmatrix}$

23.4 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C=\pi\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

23.4 h) On remarque que $L_3=L_1+2L_2+2L_4$.

23.5 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda&1&1&1&0&0\\-1&-1&2&0&1&0\\\lambda&1&2&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&2&0&1&0\\\lambda&1&1&1&0&0\\\lambda&1&2&0&0&1\end{array}\right) L_2\leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&2&0&1&0\\0&1-\lambda&1+2\lambda&1&\lambda&0\\0&1-\lambda&2+2\lambda&0&\lambda&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ L_2\leftarrow L_2+\lambda L_1\\ L_3\leftarrow L_3+\lambda L_1\end{matrix}$$

Si $\lambda=1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&2&0&1&0\\0&1-\lambda&1+2\lambda&1&\lambda&0\\0&1-\lambda&2+2\lambda&0&\lambda&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&3/(1-\lambda)&1/(1-\lambda)&1/(1-\lambda)&0\\0&1-\lambda&1+2\lambda&1&\lambda&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1+\dfrac{1}{1-\lambda}L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3-L_2\end{matrix}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&4/(1-\lambda)&1/(1-\lambda)&-3/(1-\lambda)\\0&1-\lambda&0&2\lambda+2&\lambda&-2\lambda-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-\dfrac{3}{1-\lambda}L_3\\ L_2\leftarrow L_2-(1+2\lambda)L_3\end{matrix}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4/(1-\lambda)&-1/(1-\lambda)&3/(1-\lambda)\\0&1&0&(2\lambda+2)/(1-\lambda)&\lambda/(1-\lambda)&(-2\lambda-1)/(1-\lambda)\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\leftarrow -L_1\\ L_2\leftarrow\dfrac{1}{1-\lambda}L_2\end{matrix}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}-4&-1&3\\2\lambda+2&\lambda&-2\lambda-1\\\lambda-1&0&1-\lambda\end{pmatrix}$

Fiche nº 24. Équations différentielles

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}}$

24.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1}$

24.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}}$

24.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6}$

24.2 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}}$

24.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}}$

24.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

24.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}}$

24.3 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{2x}}$

24.3 b) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

24.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}$

24.3 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{2x}}$

24.4 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

24.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}}$

24.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}}$

24.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}}$

24.4 e) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}}$

24.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos x + 2\sin x}$

24.5 b) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

24.5 c) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)}$

24.5 d) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)}$

Corrigés

24.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$.

....

24.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$.

....

24.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$.

....

24.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$.

....

24.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = \mathrm{e} = \lambda\mathrm{e}^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$.

....

24.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda \mathrm{e}^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x/7+2} + 1$.

....

24.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

....

24.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2\mathrm{e}$ soit $\mu = -\dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\pi x} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda \mathrm{e}^{\pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$.

....

24.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$.

....

24.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{x}$.

....

24.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$.

....

24.3 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3\mathrm{i}$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 3\mathrm{i} - 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - 3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i} - 1)\mathrm{e}^{2x}$.

....

24.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{x}$.

....

24.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}$.

....

24.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r-2=0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda+\mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda+\mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}e^x - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

24.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+1=0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda+\mu x)e^x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda+\mu x)e^x$.

Alors, $y(0) = \lambda = 2$ et $y'(0) = \lambda+\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^x$.

24.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+4r+4=0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda+\mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda+\mu-2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda+\mu = e^2$ et $2\lambda+\mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda+\mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^{2-2x}$.

24.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu \sin x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos x + 2\sin x$.

24.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r+1=0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

24.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1-i$ et $-1+i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0) = 0 = \lambda$ et $y_0'(0) = 1 = -\lambda+\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.

24.5 d) L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+5=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -4 et ses racines sont $1-2i$ et $1+2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^x\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^x\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right)$.

Alors, $y_0(0) = i = \lambda+\mu$ et $y_0'(0) = -i = (\lambda+\mu) + (2i\lambda - 2i\mu)$. Le système réduit s'écrit $\lambda+\mu = i$ et $4i\lambda = 2-2i$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^x\left(\dfrac{-1+i}{2}e^{2ix} + \dfrac{1+i}{2}e^{-2ix}\right)$.

En utilisant les formules d'Euler, cette solution peut également s'écrire $y_0 : x \mapsto ie^x(\cos(2x) - \sin(2x))$.

Fiche n° 25. Fonctions de deux variables

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

25.1 b) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

25.1 c) .... $\boxed{\varnothing}$

25.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

25.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

25.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2xy,2x) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2,-2y)}$

25.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

25.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

25.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

25.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

25.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

25.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

25.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

25.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

25.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

25.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

25.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

25.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

25.6 a) .... $\boxed{(0,0)}$

25.6 b) .... $\boxed{(0,3)}$

25.6 c) .... $\boxed{(0,0) \text{ et } (-1,-1).}$

25.6 d) .... $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,\mathrm{e}^{-2}).}$

25.6 e) .... $\boxed{(0,0),(1,1) \text{ et } (-1,-1).}$

Corrigés

25.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

....

25.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2+y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2+y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2+y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x\cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

....

25.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

....

25.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.

....

25.6 a) Calculons les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+2y$. La résolution est immédiate.

....

25.6 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y-6$. On résout et on obtient $x = 0, y = 3$.

....

25.6 c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2+6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x-6y$.
On résout et on obtient $(0,0)$ et $(-1,-1)$

....

25.6 d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$.
On résout et on obtient $x = 0$ et $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$ d'où $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$

....

25.6 e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x$.
On résout et on obtient $x^3 = y$ et $y^3 = x$ d'où $x = 0$ ou $x^8 = 1$ donc $(0,0),(1,1)et(-1,-1)$.

....

Fiche n° 26. Séries numériques

Réponses

26.1 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

26.1 b) .... $\boxed{2}$

26.1 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}$

26.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

26.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

26.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

26.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

26.3 a) .... $\boxed{1}$

26.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

26.3 c) .... $\boxed{\ln(2)}$

26.3 d) .... $\boxed{1}$

26.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

26.4 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

26.4 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

26.4 d) .... $\boxed{4}$

26.5 a) .... $\boxed{2}$

26.5 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

26.5 c) .... $\boxed{16}$

26.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

26.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin]-1,1[$, donc elle diverge.

26.1 b) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

26.1 c) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}.$$

26.1 d) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j = k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

26.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

26.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2 - 3$.

26.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

26.3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

26.3 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+1-\frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

26.3 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}(2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

26.3 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k, $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

26.4 a) On a $\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\dfrac{1}{4} \in \,]-1,1[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}.$

26.4 b) On a $\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^k}$. Or la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in \,]-1,1[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1})^j = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

26.4 c) La série diverge grossièrement.

26.4 d) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

26.5 a) On a $k2^{-k} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$

26.5 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in \,]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

26.5 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$

26.5 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.

Fiche nº 27. Algèbre linéaire

Réponses

27.1 a) $(3, -1)$

27.1 b) $(-1, 3)$

27.1 c) $(9/11, 2/11)$

27.1 d) $(-2, 4/5, 11/5)$

27.1 e) $(-1, 1/2, 1/2)$

27.2 a) 2

27.2 b) 1

27.2 c) 1

27.2 d) 2

27.2 e) 2

27.2 f) 1

27.3 a) 2

27.3 b) 2

27.3 c) 3

27.3 d) 4

27.4 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

27.4 b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27.4 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

27.4 d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27.5 a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigés

27.1 a) Notons $u = \lambda(0, 1) + \mu(-1, 2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0, 1) - (-1, 2)$.

27.1 b) Notons $u = \lambda(0, 1) + \mu(-1, 2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1, 2) + 3(0, 1)$.

27.1 c) Notons $u = \lambda(1, 2) + \mu(12, 13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1, 2) + \dfrac{2}{11}(12, 13)$.

27.1 d) On note $u = \lambda(0, 1, 3) + \mu(4, 5, 6) + \nu(-1, 0, 1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0, 1, 3) + \dfrac{4}{5}(4, 5, 6) + \dfrac{11}{5}(-1, 0, 1)$.

27.1 e) Notons $u = \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1) + \nu(-1, -1, 3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1, 0, 1) + \dfrac{1}{2}(1, 1, 1) + \dfrac{1}{2}(-1, -1, 3)$.

27.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

27.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

27.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

27.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

....

27.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

....

27.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

....

27.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effecutant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

....

27.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

....

27.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

....

27.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

....

27.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

....

27.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

27.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

....

27.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

27.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

....

Fiche n° 28. Réduction

Réponses

28.1 a) .... $\boxed{1, -1, 3 \text{ oui}}$

28.1 b) .... $\boxed{1, 3 \text{ oui}}$

28.1 c) .... $\boxed{1, 2, 3 \text{ non}}$

28.1 d) .... $\boxed{-1, 5 \text{ oui}}$

28.1 e) .... $\boxed{1 \text{ non}}$

28.2 a) .... $\boxed{2, 4, 6 \text{ oui}}$

28.2 b) .... $\boxed{1, 3, 2 \text{ oui}}$

28.2 c) .... $\boxed{7, 5}$

28.2 d) .... $\boxed{1, 2 \text{ non}}$

Corrigés

28.1 a) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
La matrice est diagonale.

....

28.1 b) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale. La matrice est diagonale.

....

28.1 c) La matrice est triangulaire : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
$\dim\ker(A - I_4) = 1$, $\dim\ker(A - 3I_4) = 1$ et $\dim\ker(A - 2I_4) = 1$ donc non diagonalisable.

....

28.1 d) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$. Donc $Sp(A) = \{-1, 5\}$
Il y a deux valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

....

28.1 e) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2$. Donc $Sp(A) = \{1\}$
Une seule valeur propre, si A est diagonalisable, elle est semblable à I donc égale à I absurde

....

28.2 a) On échelonne, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

....

28.2 b) On échelonne, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

....

28.2 c) On échelonne, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - 7I)) + \dim(\ker(A - 5I)) = 3$ donc diagonalisable.

....

28.2 d) On échelonne, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - I)) + \dim(\ker(A - 2I)) = 2$ donc non diagonalisable.

....